

¿Cómo promueven el cambio dimensional los libros de texto colombianos en relación con el área de regiones poligonales?

How do Colombian textbooks promote dimensional change in relation to the area of polygonal regions?

Gustavo Adolfo Marmolejo-Avenia^{a*}

^{a*} Doctor en Educación Matemática, usalgamav@udenar.edu.co, ORCID 0000-0001-9047-4389, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

Forma de citar: Marmolejo, G-A. (2018). ¿Cómo promueven el cambio dimensional los libros de texto colombianos en relación con el área de regiones poligonales?. *Eco Matemático*, 9(1), 14-21

Recibido: Junio 15 de 2017

Aceptado: Noviembre 05 de 2017

Palabras clave

Área de regiones poligonales,
Cambio dimensional,
Cognición,
Educación básica obligatoria,
Libros de texto,
Visualización.

Resumen: El cambio dimensional en la forma de ver las figuras bidimensionales es una operación básica para el desarrollo y comprensión de tareas matemáticas, pero, para los estudiantes su inclusión es compleja, incluso imposible de realizar. Por ello, su reflexión debe ser objeto de atención. El área de regiones poligonales y los libros de textos permiten comprender cómo tal operación puede ser promovida en el aula. La investigación analiza cómo los libros de texto de las tres editoriales de mayor uso en el sur-occidente colombiano presentan, en los primeros ciclos de la educación básica obligatoria, la inclusión de cambios dimensionales para calcular el área de regiones poligonales. Se analizaron 1281 tareas y se identificaron dos clases de cambios dimensionales: Fijo y Operatorio, siendo el primero el más considerado. La investigación evidencia que los libros proporcionan oportunidades limitadas para que el cambio dimensional sea aprehendido. Por ello los educadores deben diseñar tareas que complementen las expuestas por los libros, y para ello deben apropiarse de una teoría visual que les permita tomar las decisiones pertinentes.

Keywords

Area of polygonal regions,
Dimensional change,

Abstract: The dimensional change in the way of seeing on the two-dimensional figures is a basic operation for the development and understanding of mathematical tasks, but, for the students the incorporation of this operation is complex, even impossible to do. The study of the dimensional change must be an object of reflection. The

* Autor para correspondencia: usalgamav@udenar.edu.co

<https://doi.org/10.22463/17948231.1640>

Cognition,
Compulsory basic
education,
Textbooks,
Visualization.

area of polygonal regions and the textbooks allow us to understand how the dimensional change is promoted in the classroom. This research work analyzes how textbooks of the three main publishers in south-western Colombia arouse, in the first cycles of compulsory basic education, the incorporation of dimensional change to find the area of polygonal regions. An amount of 1281 tasks were analyzed. Two classes of dimensional changes were identified: Fixed and Operative, where the first dimensional change was the most considered. Research shows that textbooks propose limited opportunities for dimensional change to be apprehended. Educators must design tasks to complement the tasks exhibited by the books, consequently, so they must appropriate a visual theory that allows them to make the relevant decisions.

1. Introducción

La principal función que cumple la *visualización* en matemáticas es generar ideas o plantear maneras de proceder que apoyen o guíen la comprensión (Marmolejo y González, 2013), pero, la mayoría de los estudiantes no le consideran efectiva y asertivamente, para ellos su inclusión está lejos de ser obvia e inmediata (Inan y Dogan-Temur, 2010; Marmolejo y Vega, 2012). Por tal motivo, el desarrollo de habilidades visuales (desarrollo visual) debe ser objeto de reflexión explícito en la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones como las realizadas por Duval (1998, 2003, 2004, 2011, 2017) sugieren que el desarrollo visual debe tenerse en cuenta desde los primeros grados de la educación básica y que la *visualización* adquiere características y funciones distintas según las representaciones semióticas¹ en consideración.

Las figuras geométricas bidimensionales (figuras) son el tipo de representación semiótico de interés en la investigación. En este sentido, se asume la *visualización* como la discriminación de relaciones entre las unidades constituyentes de las figuras, y, siguiendo los parámetros de Duval (1998, 2017), se contempla que se debe promover la *visualización* independiente al desarrollo de otras actividades cognitivas, como

el razonamiento y la construcción. Asimismo, se debe considerar la aplicación de tareas que, separada y diferenciadamente, permitan dos tipos de discriminación visual de naturaleza distinta: *aprehensión discursiva* y *aprehensión operatoria*, y sólo una vez propiciado lo anterior, la articulación entre estos dos tipos de discriminación debe constituir un objeto de atención.

El interés del presente trabajo recae en el desarrollo visual asociado a la *aprehensión discursiva*. Puntualmente, se contempla la operación de *cambio dimensional* (Duval, 2004), es decir, cómo estos materiales didácticos plantean el acto de descomponer una figura (dimensión 2) en unidades figurales de dimensión inferior a la de la figura (dimensiones 0 y 1). En este orden de ideas, se asume que una figura representa una situación geométrica sólo en la medida en que la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones, estén explícitamente fijadas inicialmente (Duval, 2017). Pero, las figuras imponen, según la primera de las leyes gestálticas de organización y reconocimiento perceptivo de las formas, una prioridad en la discriminación de unidades bidimensionales sobre las unidades de 1 o 0 dimensión. Es decir, que sobre una figura se reconoce, en primera instancia, una forma de esa misma dimensión (triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.), y sólo, en segundo lugar, se

pasa a discriminar, entre otros, tanto sus lados, diagonales, alturas, medianas y bisectrices, como los vértices y los puntos notables (circuncentro, baricentro, ortocentro, incentro, etc.).

En palabras de Duval (2004), lo anterior obliga a quien busca discriminar información sobre una figura aplicar un cambio dimensional en su forma de ver la figura. Esto resulta complejo para la mayoría de los estudiantes, incluso, para aquellos que sí logran considerarla, los elementos de 1 y 0 dimensión de las figuras tienden a percibirse como bordes no separables de sus superficies, lo que repercute negativamente en cuanto a las exigencias visuales que requieren las matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas requiere, pues, espacios de reflexión que promuevan la aplicación de procesos de deconstrucción dimensional sobre las figuras (Duval, 2004). La deconstrucción dimensional no se puede efectuar en el marco de actividades manuales, como sí es posible en el caso de las operaciones y de los cambios figurales donde la manipulación implica la conservación del número de dimensiones del soporte material utilizado. Además, el número de dimensiones no se puede mostrar, solamente nombrar, por tanto, sólo aquellos estudiantes que tienen conciencia de lo que designan, serán capaces de darse cuenta a qué se está haciendo referencia (Duval, 2004).

La consideración de los elementos de 0 y 1 dimensión de una figura fuera de su marco de referencia, requiere prolongar la recta soporte de los segmentos, reorganizar una figura dada, discriminar en una figura, otra u otras configuraciones, etc. Esto permite a un sujeto aprender a focalizar la atención en tales unidades y, durante ese proceso, asumirlas como elementos dinámicos y susceptibles de transformación. Solo de esta manera es posible considerarlos de manera independiente de la superficie que delimitan (Duval, 2004).

El propósito de este estudio es determinar

cómo los libros de texto colombianos (libros), en los temas relativos al área de regiones poligonales (área), propician el *cambio dimensional* en la forma de ver las figuras, es decir, cómo estos materiales didácticos ayudan a descomponer una figura (dimensión 2) en unidades figurales de dimensión inferior a la de la figura (dimensiones 0 y 1). En este orden de ideas, se asumen como cuestiones que guían la consecución del propósito mencionado las siguientes: ¿los libros propician el cambio dimensional en las tareas que proponen?, si es así, ¿los cambios dimensionales propiciados son de naturaleza distinta? ¿Todos propician el desarrollo visual? ¿En qué ciclos de la educación básica se dan mayores oportunidades para que los estudiantes aprendan a realizar cambios dimensionales que les permita utilizar otras formas de ver sobre las figuras?

La elección del concepto de área y de los libros de texto como herramientas de estudio en la investigación, se relaciona, por un lado, con que el tratamiento del área se da, explícita o implícitamente, a través de los primeros ciclos de la enseñanza de matemáticas y puede ser considerado independiente de otras actividades cognitivas distintas a la visualización (Marmolejo y González, 2015), aspectos a contemplar en el desarrollo de la visualización; y, por otro lado, que los libros juegan un rol determinante en la articulación de las exigencias curriculares nacionales en la praxis educativa al reflejar, al menos en parte, las intenciones de los planes de estudio presentes en los documentos oficiales (Schmidt et al, 1996), por lo que se convierten en una fuente para identificar el contenido cubierto (Pepin, Haggarty y Keynes, 2001) y la forma cómo se presenta en el aula escolar (Cobo y Batanero, 2004). El área y los libros constituyen un espacio de interés para explorar cómo el desarrollo de la visualización es, o puede ser, promovido en el aula.

En lo que sigue, se presenta una descripción de los materiales y métodos considerados en la investigación, seguido de un reporte de los datos

encontrados y la presentación y discusión de los resultados. Finalmente, se establecen algunas conclusiones relativas a las implicaciones de este estudio tanto en futuras investigaciones como en el diseño de libros y el desarrollo de programas de cualificación docente.

2. Materiales y métodos

Conforme a la tipificación de las categorías de análisis asumidas, la investigación es cualitativa, en cuanto al objetivo propuesto es descriptiva e interpretativa. Considerando el grado de abstracción, la investigación es básica y según la captación y selección de los datos, es inductiva y deductiva.

En el presente trabajo se analizaron 18 libros de texto utilizados para la enseñanza de las matemáticas en los primeros seis grados de la educación básica obligatoria (grados primero a sexto de bachillerato). Se consideraron las tres editoriales de mayor uso en el Sur-Occidente colombiano (Voluntad, Santillana y SM), y fueron analizadas un total de 1280 tareas (Voluntad: 442 tareas, Santillana: 415 tareas y SM: 424 tareas).

Como objeto de análisis se contemplaron los capítulos de Geometría y Medición de los libros en cuestión, en particular, los apartados donde se plantea, de forma explícita o implícita, el concepto de área de regiones poligonales, es decir, el área aparece como un tipo de magnitud (unión, sustracción, duplicación, descomposición y comparación de superficies) o se contempla su medida a través de la replicación o conteo de unidades superficiales o mediante la aplicación de fórmulas. También se consideraron los apartados donde se tratan de forma simultánea, los conceptos de área y perímetro.

Como unidades de análisis se asumieron los elementos discursivos utilizados por los libros al definir o exponer el contenido propuesto. También se consideraron los procedimientos en los cuales se ejemplifica o aplica el contenido expuesto, así

como las actividades propuestas por los libros para movilizar el conocimiento planteado.

Para la interpretación de los datos se consideró el análisis funcional propuesto por Duval (2017, 2004) en relación con el desarrollo de la visualización asociada a las figuras geométricas, en particular, lo relacionado con el desarrollo de la aprensión discursiva.

Dos fueron las categorías de análisis asumidas en el estudio: Ciclo de enseñanza y Cambio dimensional. La primera de las categorías se obtuvo de los Lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional colombiano (MEN, 2006). La segunda categoría, por su parte, lo fue de la manera como los libros, al plantear el concepto de área, presentan el acto de “descomponer la figura en unidades figurales de dimensión inferior” (Duval, 2004, p.20).

En la Tabla 1 se indican los descriptores de cada una de las categorías de análisis consideradas en la investigación.

Tabla 1. Descriptores de las categorías de análisis ciclo de enseñanza y cambio dimensional

Categoría: Ciclo de enseñanza	
Primero	Grados primero a tercero de educación básica
Segundo	Grados cuarto y quinto de educación básica
Tercero	Grado sexto de educación básica
Categoría: Cambio dimensional	
Fijo	Si bien la superficie de una figura y sus unidades constituyentes de dimensión 1 y 0 tienden a ser asumidas de forma separada, las segundas son reconocidas como elementos fijos y estáticos, no separables de la superficie de la figura en cuestión. Al menos una de las unidades de dimensión 1 o 0 que constituyen la figura de inicio es discriminada independiente de su superficie, en otras palabras, tales unidades son asumidas de forma dinámica: sobre ellas se aplican
Operatorio	operaciones de naturaleza unidimensional o cero dimensional. Es el caso de dilataciones, contracciones, sustracciones (quitar a un segmento otro segmento), uniones, rotaciones, traslaciones y desdoblamientos. No es necesario diferenciar la superficie de la figura y sus unidades constituyentes para resolver o comprender la tarea
Ausente	explicitada.

3. Resultados y discusión

Los resultados de la investigación muestran que los libros contemplan de forma significativa

el cambio dimensional como una operación clave en los temas correspondientes al concepto de área. la mayor parte de sus tareas (58,46%) exigen considerar un cambio dimensional Fijo u Operatorio para ver las figuras (Figura 1).

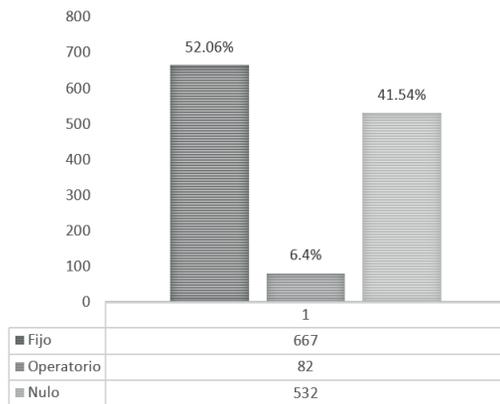


Figura 1. Cambios dimensionales presentes en las tareas de los libros de texto

No obstante, en la mayoría de estas tareas (667), las unidades constituyentes de 1 y 0 dimensión se asumen de forma estática, es decir, no son objeto de transformación o de reubicación espacial o son consideradas como una parte inamovible de la superficie de las unidades 2D que constituyen o de la figura de la cual forman parte (tareas con cambio dimensional Fijo). Solo 82 tareas consideran algún tipo de dinamismo sobre tales unidades. Es el caso de la aplicación de operaciones tipo dilatación, contracción, sustracción, unión, rotación, traslación y desdoblamiento. Ninguna de las tareas de los libros considera operaciones como observar una figura fuera de su marco de referencia, reorganizar una figura dada, discriminar en una figura, otra, u otras configuraciones. Operaciones estas también determinantes para la deconstrucción dimensional de figuras.

Si consideramos que en la educación obligatoria los libros son el material didáctico de mayor uso en la planeación, preparación y desarrollo de las clases de matemáticas (Schmidt et al, 1996; González y Sierra, 2004), entonces los resultados reseñados muestran que los libros colombianos no aportan oportunidades reales

que puedan considerar los educadores para lograr el desarrollo visual asociado a la aprehensión discursiva en sus clases.

Los resultados de esta investigación también muestran que el número de tareas que no plantean la aplicación de un cambio dimensional, disminuyen a medida que aumenta el nivel de escolaridad de los estudiantes (ver Figura 2).

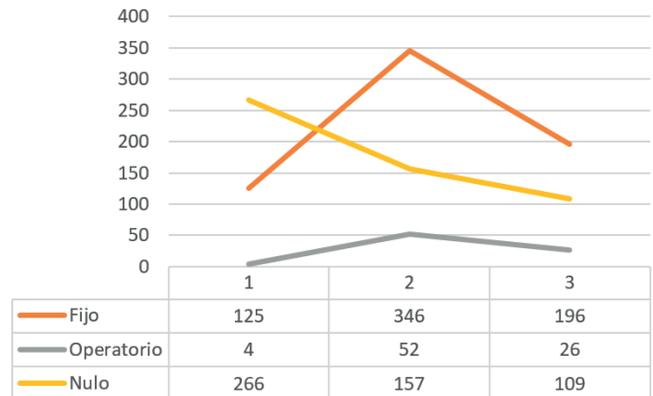


Figura 2. Cambios dimensionales por ciclo de enseñanza

Lo anterior no es de extrañar, pues, al pasar de un ciclo de enseñanza a otro, los tópicos matemáticos donde es necesario el cambio dimensional crecen en número, es decir, se pasa de nombrar figuras, de aplicar operaciones sobre las figuras, de discriminar regularidades en secuencias donde intervienen las figuras y de la medición directa de superficies, a la aplicación de las mismas operaciones geométricas pero considerando puntos o ejes determinantes. Por ejemplo, puntos de rotación y ejes de simetría. Asimismo, también aumenta el número de tareas en las que se trata la aplicación de fórmulas para determinar la medida del área de figuras poligonales y, paralelamente, se pide calcular perímetros.

En cuanto a las tareas en las que se requiere un cambio dimensional independientemente de su naturaleza, la mayoría están en los libros del segundo de los ciclos de enseñanza mientras que en el primero son minoría. Lo expuesto en el párrafo anterior, también explica por qué del primer ciclo de enseñanza al segundo, aumentan

las tareas en las que se requiere la operación de cambio dimensional, mas no el hecho que en el último ciclo, disminuya el número de estas tareas. Así, pues, las oportunidades que los libros brindan para lograr el desarrollo visual asociado a la aprehensión discursiva son, en la educación básica, mayores en el segundo ciclo de enseñanza, pero aun así son, en extremo limitadas. Esto se demuestra tanto por las cuestiones reseñadas en el análisis global antes planteado, como por el pequeño número de tareas de cambio dimensional Operatorio incluidas (52).

Existe, pues, un desequilibrio en el número de tareas que los libros proponen en los dos últimos ciclos de enseñanza, lo que, sin lugar a duda, obstaculizará cualquier posibilidad de desarrollo visual al tratar el tema de área de figuras poligonales. Es necesario, pues, que disminuyan en ambos ciclos las tareas que no incluyen cambio dimensional y las que lo contemplan de forma estática, y en su lugar, se consideren tareas que promuevan cambios dimensionales operatorios. Además, es indispensable incluir entre estas últimas operaciones por otras como se observa una figura fuera de su marco de referencia, reorganizar una figura dada y discriminar en una figura, otra, u otras configuraciones.

4. Conclusiones

La visualización es una cuestión de tratamiento de información y es susceptible de desarrollo (Marmolejo y Vega, 2012). El área es un objeto matemático donde la visualización tiende a ser propicia, consistente y pertinente (Marmolejo y González, 2015). Los libros, por su parte, al ser uno de los materiales didácticos de mayor uso en la escuela, constituyen elementos adecuados para comprender cómo en el aula, y a través del estudio del área de superficies planas, se considera esta actividad cognitiva.

El cambio dimensional es una de las operaciones visuales de mayor complejidad en la enseñanza de las matemáticas. No obstante, los

libros analizados, en lo que se refiere al concepto de área, promueven la inclusión de esta operación de forma en extremo limitada. Esto puede considerarse un elemento para comprender por qué los estudiantes colombianos en las pruebas externas nacionales e internacionales encuentran serias dificultades al ser evaluados en los tópicos de geometría y medición (Marmolejo, 2005; MEN, 1996). Se requiere un trabajo más intenso en lo relativo a la consideración de las figuras planas y en las tareas en las que la operación de cambio dimensional desempeña un rol determinante.

Así, pues, si debe lograrse el desarrollo visual en los primeros grados de la enseñanza de las matemáticas (Duval, 1998), y si los educadores consideran para tal fin las tareas que incluyen los libros de texto en cuanto al concepto de área, entonces, por un lado, es labor de los diseñadores de los libros velar por un equilibrio en las tareas propuestas, es decir, se debe tratar de disminuir aquellas que suscitan cambios dimensionales Fijos y aumentar las que contemplan cambios dimensionales Operatorios. Más específicamente, se debe aumentar el número de tareas que incluyen cambios dimensionales Operatorios tanto en el primero como en el segundo de los ciclos de enseñanza, y en el tercero establecer una proporción mayor de tales tareas que en los ciclos previos. Los educadores, por otro lado, deben apropiarse de referentes conceptuales que les permita identificar las operaciones, dificultades y fenómenos visuales que intervienen en la enseñanza de las matemáticas y de cómo unos y otros pueden ser desarrollados o enfrentados.

Para terminar, es importante llamar la atención a la realización de nuevas investigaciones que analicen cómo los libros desde el concepto de área promueven el desarrollo de otras operaciones visuales asociadas a las figuras. Igualmente, se debe considerar tal cuestión en relación con otros objetos matemáticos y a través de representaciones semióticas de naturaleza distinta, es el caso de las figuras tridimensionales, los gráficos cartesianos,

las tablas... Asimismo, habría que analizar cómo los educadores utilizan las tareas de los libros para lograr el desarrollo visual, y cómo las decisiones adoptadas influyen en el aprendizaje de sus estudiantes. Sólo de esta manera será posible hacer de la visualización una herramienta real para aportar sentido y significado al estudio de las matemáticas.

5. Referencias

- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la medida en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.
- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Artes Gráficas Univalle.
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma*, Brasil, São Paulo: Editorial PROEM.
- Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y...una quinta. En M.C. Chamorro (Ed), *Números, fórmulas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159-188). Instituto Superior de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Sociedad anónima de fotocomposición.
- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. (pp.37-51). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- González, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de textos de matemáticas.
- Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408
- Inan, H. & Dogan, O. (2010). Understanding kindergarten teacher's perspectives of teaching basic geometric shapes: a phenomenographic research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 42(5), 457-468.
- Marmolejo, G. (2005). Análisis del Tópico de Geometría y Medición. En Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la escuela. Universidad del Valle, 27-44.
- Marmolejo, G. y González, M. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *REIEC*, 10(1), 45-57
- Marmolejo, G. y González, M. (2013). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), 87-106.
- Marmolejo, G. y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 9-34.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias*. MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (1996). Análisis y Resultados de las pruebas de Matemáticas - T.I.M.S.S./96. Creamos Alternativas
- Pepin, B. Haggarty, L. & Keynes, M. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.
- Schmidt, W. Jorde, D. Cogan, L. Barrier, E. Gonzalo, I. Moser, U. Shimizu, Y. Sawada,

T. Valverde, G. Mc Knight, C. Prawat, R. Wiley, D. Raizen, S. Britton, e.D. y Wolfe, R.(1996). *Characterizing pedagogical flow. An investigation of Mathematics and Science Teaching in Six Countries*. Dordrecht: KluwersAcademicPublishers.