¿Por qué Aquiles adelanta a la tortuga?

Why Achilles overtakes the tortoise?

[a]Pavel Anatolyevich Nikolaychuk

[a]Maestría en Química, Čelâbinskij gosudarstvennyj universitet, npa@csu.ru, ORCID: 0000-0003-0335-3955, Chelyabinsk State University. Chelyabinsk, Federación Rusa

Forma de citar: P. A. Nikolaychuk. ¿Por qué Aquiles adelanta a la tortuga?. *Eco Matemático, 9*(1), 92-96

Recibido: Mayo 10 de 2017
Aceptado: Octubre 01 de 2017

Palabras clave

Las paradojas de Zenón, progresión geométrica decreciente infinita, educación media

Resumen: En esta comunicación se discute cómo se puede explicar la paradoja de Zenón "Aquiles y la tortuga" utilizando la suma de la progresión geométrica decreciente infinita e implementarla en el proceso educativo de la escuela media.

Keywords

Zeno's paradoxes, infinitely decreasing geometric progression, middle school education

Abstract: It is discussed in this communication, how one can provide an explanation of the Zeno's paradox "Achilles and the tortoise" using the sum of infinitely decreasing geometric progression and implement it in the educational process in the middle school.

1. Introducción

A mediados del siglo IV aC, el filósofo griego Zenón de Elea formuló una serie de paradojas sobre los conceptos de movimiento, universo y multiplicidad, que han sobrevivido debido a las obras de Aristóteles y son ahora conocidos Como las "paradojas de Zenón". La paradoja más conocida se llama "Aquiles y la tortuga" (Αριστοτέλης, 350 aC):

> "En una carrera, el corredor más rápido (Aquiles) nunca puede adelantar a la más lenta (la tortuga), ya que el perseguidor debe alcanzar primero el punto de donde comenzó el perseguido, de modo que el más lento debe llevar siempre una ventaja".

Varias publicaciones sobre los aspectos físicos, filosóficos y matemáticos de la cuestión se dedicaron a esta paradoja (Black, 1951; Donnan, 1944; Jones, 1946; Hinton & Martin, 1954; Lee, 1965; Misra & Sudarshan, 1977; Papa-Grimaldi, 1996; Thomas, 1952).

* Autor para correspondencia: npa@csu.ru

http://dx.doi.org/10.22463/17948231.1731

Sin embargo, las explicaciones matemáticas de esta paradoja que puede encontrarse en la mayoría de los artículos, libros de texto y sitios web de Internet pueden no ser suficientemente claras. *Exempli gratia*, así es como se ve una explicación típica (Thomas, 2000):

> "... las distancias que Aquiles tiene que recorrer, primero 10 m hasta T_0, luego 1 m hasta T_1, luego 0,1 m hasta T_2, etc., podemos escribirla como una suma de una serie geométrica:
>
> $$10 + 1 + 0.1 + ... + 10^{(2-n)} + ...$$
>
> ...como la distancia que viaja Aquiles para atrapar la tortuga es la suma de una serie geométrica donde el multiplicador es menor que uno ..., sabemos que la distancia es finita (e igual a 11.11m) a medida que la serie converge ".

En realidad, esta explicación utiliza la progresión geométrica decreciente infinita pero sólo dice que la suma de esta progresión es finita porque "la serie converge" y se refiere al criterio de convergencia de series infinitas propuesto por el matemático francés Augistin-Loren Cauchy (Cauchy, 1821). Requiere conocimiento de los fundamentos de la matemática superior para entender estas explicaciones. En este sentido, la introducción de la paradoja "Aquiles y la tortuga" a los jóvenes (al menos a nivel cualitativo) tiene lugar mucho antes de entrar en las instituciones de educación superior y, por lo tanto, para muchos de ellos esta paradoja sigue sin resolverse. Por otra parte, la mayoría de los autores asumen para el propósito de la conveniencia que Aquiles corre exactamente 10 veces más rápidamente que la tortuga, pero esta suposición en general no es necesaria.

Se discute en esta comunicación, cómo se puede proporcionar una explicación matemática general de esta paradoja en términos del curso de álgebra en la novena forma de la escuela media, y cómo este ejemplo podría ser incorporado en la lección de álgebra de la escuela. En primer lugar, un profesor introduce una clase con la progresión geométrica infinita, sus términos y su razón que es menor que la unidad, y establece que la suma de todos los términos de la progresión es finita y puede calcularse de acuerdo con la ecuación:

$$\text{suma de progresión} = \frac{\text{primer término}}{1 - \text{razón}}. \qquad (1)$$

Entonces un profesor introduce una clase con la paradoja de «Aquiles y la tortuga» y pide a los alumnos que la resuelvan. Finalmente, se podría presentar la solución. Según las condiciones, sea s_0 una pierna que Achilles da a la tortuga (una distancia entre los corredores en el momento inicial del tiempo t_0); k es la relación de la velocidad de Aquiles con la velocidad de la tortuga.. Sea v la velocidad constante del movimiento de la tortuga, y en consecuencia, la velocidad constante del movimiento de Aquiles sería igual a $k \cdot v$ (ver Figura 1).

Que Aquiles llegue al punto, donde la tortuga estaba en t_0, en el momento del tempo t_1. Durante el período de tiempo de t_0 a t_1, Aquiles cubre la distancia s_0, y la tortuga cubre la distancia igual a $\frac{s_0}{k}$. En el momento t_1 la distancia entre los corredores es igual a $s_1 = \frac{s_0}{k}$, y la distancia total cubierta por Aquiles es igual a s_0.

Que Aquiles llegue al punto, donde la tortuga estaba en t_1, en el momento del tempo t_2. Durante el período de tiempo de t_1 a t_2, Aquiles cubre la distancia s_1, y la tortuga cubre la distancia igual a $\frac{s_1}{k} = \frac{s_0}{k^2}$. En el momento t_2 la distancia entre los corredores es igual a $s_2 = \frac{s_0}{k^2}$, y la distancia total cubierta por Aquiles es igual a $s_0 + s_1$.

Que Aquiles llegue al punto, donde la tortuga estaba en t_2, en el momento del tempo t_3. Durante el período de tiempo de t_2 a t_3, Aquiles cubre la

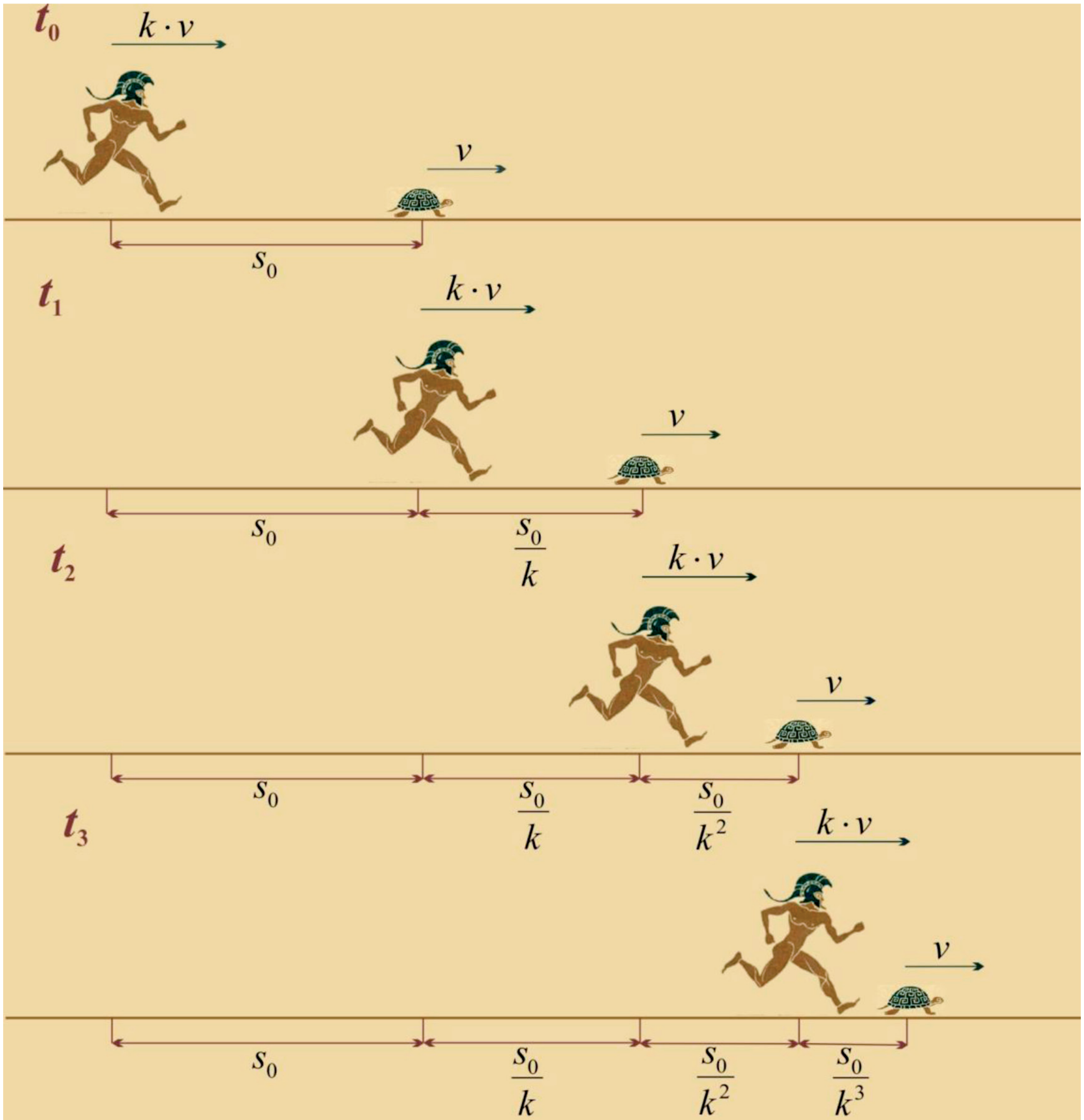

Figura 1. La carrera de Aquiles contra la tortuga.

distancia s_2, y la tortuga cubre la distancia igual a $\frac{s_2}{k} = \frac{s_0}{k^3}$. En el momento t_3 la distancia entre los corredores es igual a $s_3 = \frac{s_0}{k^3}$, y la distancia total cubierta por Aquiles es igual a $s_0 + s_1 + s_2$.

Las mismas deducciones pueden repetirse cualquier número de veces, y generalizadas de la siguiente manera: que Aquiles llegue al punto, donde la tortuga estaba en t_{n-1}, en el momento del tempo t_n. Durante el período de tiempo de t_{n-1} a t_n, Aquiles cubre la distancia s_{n-1}, y la tortuga cubre la distancia igual a $\frac{s_{n-1}}{k} = \frac{s_0}{k^n}$. En el momento t_n la distancia entre los corredores es igual a $s_n = \frac{s_0}{k^n}$, y la distancia total cubierta por Aquiles es igual a $s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}$.

La secuencia de números s_0, s_1, s_2, s_3, …, s_{n-1}, s_n, que determina las distancias entre los corredores en los momentos de tiempo t_0, t_1, t_2, t_3, …, t_{n-1}, t_n, es la *progresión geométrica decreciente infinita* con el primer término s_0 y la razón $\frac{1}{k}$. La distancia total cubierta por Aquiles en el tiempo t_n está determinada por la suma de todos los términos previos de la progresión. La Figura 1 demuestra claramente esto. Según las deducciones de Zenón, Aquiles nunca adelanta a la tortuga, mientras que el número de términos n es infinitamente grande, y en cada uno de los momentos la distancia entre los corredores es finito y diferente de cero. Sin embargo, la solución de esta paradoja es que la suma de todos los términos de una progresión geométrica decreciente infinita no es el infinito, sino el valor finito. Exactamente este valor determina la distancia total cubierta por Aquiles en el momento del tiempo en que al fin adelanta la tortuga, y podría calcularse de acuerdo con la ecuación (1):

$$s = \frac{s_0}{1-\frac{1}{k}} = s_0 \cdot \frac{k}{k-1}. \qquad (2)$$

Con el fin de verificar la corrección del resultado obtenido de acuerdo con la fórmula para la suma de la progresión geométrica decreciente infinita, se puede implementar el modelo físico del proceso. Que Aquiles llegue a la tortuga en el momento del tiempo t. La distancia recorrida por la tortuga durante el período de tiempo de t_0 a t es igual a $v\cdot(t-t_0)$, y la distancia recorrida por Aquiles es igual a $k\cdot v\cdot(t-t_0)$. Según la condición, la diferencia en las distancias cubierta por los corredores, es exactamente igual a la pierna que fue dado por Aquiles a la tortuga en el inicio, s_0. Entonces:

$$k\cdot v\cdot(t-t_0) = s_0 + v\cdot(t-t_0), \qquad (3)$$

de lo que sigue que

$$t-t_0 = \frac{s_0}{(k-1)\cdot v}. \qquad (4)$$

Entonces la distancia cubierta por la tortuga en el momento del tiempo t es igual a $v\cdot\frac{s_0}{(k-1)\cdot v} = \frac{s_0}{k-1}$, y la distancia cubierta por Aquiles en el mismo momento de tiempo es igual a $k\cdot v\cdot\frac{s_0}{(k-1)\cdot v} = s_0\cdot\frac{k}{k-1}$, que coincide con el valor calculado de acuerdo con la ecuación (2).

El uso de ejemplos vivos y memorables en las lecciones de matemáticas de la escuela promueve la mejor comprensión y memorización del material por los alumnos (Egan, 1992; Rowland, 2008; Van de Walle, Karp & Williams, 2007). La ilustración de la aplicabilidad de la fórmula para la suma de la progresión geométrica decreciente infinita en el curso de álgebra de la escuela media con la ayuda de la paradoja de “Aquiles y la tortuga” no sólo ayuda a los alumnos a memorizar esta fórmula más fácil, sino también les da una clara explicación de una de las paradojas más conocidas.

2. Referencias

Αριστοτέλης. (350 aC). *Φυσικὴ ἀκρόασις* VI:9, 239b15.

Black, M. (1951). Achilles and the Tortoise. *Analysis*, 11(5), 91–101. doi: 10.1093/analys/11.5.91.

Cauchy, A. (1821). *Cours d’Analyse de l’École Royale Polytechnique; I.re Partie. Analyse algébrique*. L’Imprimerie Royale, Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi.

Donnan, F. (1944). Achilles and the Tortoise. *Nature*, 153, 464. doi: 10.1038/153464b0.

Egan K. (1992). *Imagination in Teaching and Learning: The Middle School Years*. Chicago: University of Chicago Press.

Hinton, J. Martin, C. (1954). Achilles and the Tortoise. *Analysis*, 14(3), 56–68. doi: 10.1093/analys/14.3.56.

Jones P. C. (1946). Achilles and the Tortoise.

Mind, 55(219), 341–345. doi: 10.1093/mind/LV.219.341.

Lee, H. (1965). Are Zeno's Paradoxes Based on a Mistake? *Mind*, 74(296), 563–570. doi: 10.1093/mind/LXXIV.296.563.

Misra, B. Sudarshan, C. G. (1977). The Zeno's paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics*, 18(4), 756–763. doi: 10.1063/1.523304.

Papa-Grimaldi, A. (1996). Why Mathematical Solutions of Zeno's Paradoxes Miss the Point: Zeno's One and Many Relation and Parmenides' Prohibition. *The Review of Metaphysics*, 50(2), 299–314.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational studies in mathematics*, 69(2), 149–163. doi: 10.1007/s10649-008-9148-y.

Thomas, L. E. (1952). Achilles and the Tortoise. *Analysis*, 12(4), 92–94. doi: 10.1093/analys/12.4.92.

Thomas, R. (2000). Mathematical mysteries: Zeno's Paradoxes. *Plus*. Recuperado de: https://plus.maths.org/content/mathematical-mysteries-zenos-paradoxes.

Van de Walle, J. Karp, K. Williams, M. (2007). *Elementary and middle school mathematics. Teaching development*. Boston: Pearson.