Eco matemático ISSN: 1794-8231 (Impreso), E-ISSN: 2462-8794 (En línea) Volumen 12 (1) Enero-Junio de 2021, páginas 13-25

Una caracterización del pensamiento variacional desde la resolución de problemas de ecuaciones lineales diofánticas y la teoría fundamentada

A Characterization of variational thinking from linear-diaphantic equation problem solving and Grounded Theory

Luis Fernando Mariño[a], Mary Falk de Losada[b], Rosa Virginia Hernández[c]

[a]Magíster en Educación Matemática, fernandoml@ufps.edu.co, https://orcid.org/0000-0002-3438-6963, Universidad Francisco de Paula Santander Cúcuta, Colombia

[b]Doctora en Matemáticas, mariadelosada@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-6380-0481, Universidad Antonio Nariño Colombia

[c]Magíster en Educación Matemática, rosavirginia@ufps.edu.co, https://orcid.org/0000-0002-2638-671X, Cúcuta, Colombia

Forma de citar: Mariño, L.F, Falk de Losada, M., & Hernández, R.V, (2021). Una caracterización del pensamiento variacional desde la resolución de problemas de ecuaciones lineales diofánticas y la teoría fundamentada. *Eco Matemático,* 12 (1), 13-25

Recibido: 15 de agosto de 2020
Aceptado:18 de octubre de 2020

Palabras clave

Pensamiento Variacional, Resolución de Problemas, Teoría Fundamentada, Ecuaciones Lineales Diofánticas.

Resumen: El pensamiento variacional ha sido caracterizado desde diferentes contextos y perspectivas, generalmente estos trabajos, han sido realizados desde la solución de problemas que involucran el concepto de función en dominios continuos. La investigación estuvo centrada en dar respuesta a la pregunta de investigación, ¿cómo es la naturaleza del pensamiento variacional manifestado por profesores de matemáticas en formación, cuando solucionan problemas de ecuaciones lineales diofánticas? El trabajo se orientó por un enfoque cualitativo con un diseño estratégico desde la teoría fundamentada. Como fuentes de datos, se diseñaron e implementaron 6 secuencias de aprendizaje a un grupo de 24 estudiantes que tomaron un curso de Teoría de Números y se forman para profesores de matemáticas. Entre los hallazgos se destaca, el cómo a partir de situaciones particulares, los estudiantes hacen conjeturas, descubren relaciones y patrones que los conduce a realizar acciones para representar, organizar y reorganizar su conocimiento. Los procesos simultáneos de recolección, codificación y análisis de datos y el método de comparación constante, condujeron a la saturación teórica, posibilitando construir el núcleo de la teoría, como un proceso entre las operaciones variacionales de particularizar, conjeturar, relacionar, generalizar y probar, junto a una serie de acciones manifestadas por los participantes, cuando su pensamiento variacional opera sobre problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma ax+by=c.

Keywords

Variational Thinking, Problem Solving, Grounded Theory, Open, Axial and Selective Coding, Diophantine Linear Equations.

Abstract: Variational thinking has been characterized from different contexts and perspectives, generally these works have been carried out from the solution of problems involving the concept of function in continuous domains. The research was focused on answering the research question, how is the nature of variational thinking manifested by mathematics teachers in training, when solving problems of diophantine linear equations? The work was guided by a qualitative approach with a strategic design based on grounded theory. As data sources, 6 learning sequences were designed and implemented to a group of 24 students who took a course of Number Theory and are training to become mathematics teachers. Among the findings, it stands out, how from particular situations, students make conjectures, discover relationships and patterns that lead them to perform actions to represent, organize and reorganize their knowledge. The simultaneous

*Autor para correspondencia: fernandoml@ufps.edu.co

DOI 10.22463/17948231.3065

processes of data collection, codification and analysis and the method of constant comparison, led to theoretical saturation, making it possible to build the core of the theory, as a process between the variational operations of particularizing, conjecturing, relating, generalizing and proving, together with a series of actions manifested by the participants, when their variational thinking operates on problems involving diophantine linear equations of the form ax+by=c.

Introducción

La naturaleza del pensamiento variacional ha sido caracterizada desde diferentes contextos con diversas perspectivas. Estas investigaciones generalmente siguen dos vertientes. En una línea, se destacan los trabajos de quienes siguen a Harel G. y Confrey J. acerca del razonamiento como forma de pensar, se destacan los constructos teóricos de: razonamiento covariacional (Confrey, 1991; Confrey y Smith, 1995; Thompson, P. W. 1990), razonamiento variacional (Thompson y Carlson, 2017), razonamiento cuantitativo (Thompson P., 1990; Thompson y Thompson, 1992, Abril; Thompson P., 2011; Thompson P., Carlson, Byerley y Hatfield, 2014; Thompson y Carlson, 2017), razonamiento continuo y discreto (Castillo-Garsow C., 2010;) (Castillo-Garsow C., 2012; Castillo-Garsow, Johnson y Moore, 2013), entre otros.

Confrey (1991), Confrey y Smith (1995), definieron el razonamiento covariacional como el cambio de los valores de dos variables, cuando ellas varían simultáneamente. Sus investigaciones fueron realizadas a partir problemas que involucraron temas de funciones exponenciales y razones de cambio en sus trabajos con estudiantes. Confrey y Smith precisaron y definieron los términos unidad multiplicativa, reiniciación, partes multiplicativas y razón, entre otros. Para estos autores, los significados conceptuales tuvieron sus raíces en la resolución de problemas de números racionales cuando los estudiantes experimentaron obstáculos conceptuales al identificar el todo cuando se multiplican fracciones.

Confrey (1991), Confrey y Smith (1995) utilizaron el término covariación como alternativa para crear y conceptualizar relaciones funcionales y consideraron dos enfoques: un enfoque de correspondencia y un enfoque de covariación. Confrey y Smith afirman que en el currículo prevalece el enfoque de correspondencia con la notación funcional $y = f(x)$, al determinar un único valor de y para algún valor de x dado. Mientras que, el enfoque covariacional implica moverse operacionalmente de y_m a y_{m+1} coordinando con los movimientos de x_m a x_{m+1}.

Thompson y Carlson (2017) hicieron una clara distinción entre razonamiento variacional y razonamiento covariacional. El razonamiento variacional implica concebir la variación de los valores de un atributo de un objeto. Mientras que el razonamiento covariacional implica la coordinación de la variación en valores de dos atributos diferentes. Saldanha y Thompson (1998), Thompson y Carlson (2017) caracterizaron la covariación en términos de conceptualizar los valores de cantidades como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades cuando varían simultáneamente. Sin embargo, para Thompson (1990), la cantidad no es igual a un número; define cantidad como la conceptualización de un objeto por parte de alguien, con un atributo que puede ser medido.

En este sentido, la noción de covariación es la de alguien que tiene en mente una imagen sostenida de los valores de dos cantidades simultáneamente. Implica acoplar las dos cantidades, de modo que, se forma un objeto multiplicativo de las dos. En la teoría del razonamiento cuantitativo de Thompson una persona razona covariacionalmente cuando prevé que los valores de dos cantidades varíen y que lo hagan simultáneamente (Thompson y Thompson, 1992, Abril; Carlson, 1998; Thompson, 2011; Thompson P., Carlson, Byerley, y Hatfield, 2014; Thompson y Carlson, 2017).

Como resultado de sus trabajos Castillo-Garsow (2012, 2013) clasificaron dos formas diferentes de pensar sobre el cambio: a) pensar sobre el cambio en pedazos completos (pensamiento robusto). Por ejemplo, pensar en lo que ocurre totalmente en el intervalo de: una hora, luego en un minuto, luego en un segundo y así sucesivamente, y b) pensar en el cambio como un cambio en progreso (pensamiento suave).

Desde otra mirada y con otras perspectivas, Smith (2008) definió el pensamiento funcional como pensamiento representacional centrado en las relaciones de dos o más cantidades variables, en sus trabajos con funciones. Siguiendo esta linea, Blanton y Kaput (2011), establecieron seis categorías para caracterizar el pensamiento funcional: a) representar los datos como entrada-salida, b) representar gráficamente los datos, c) representar los datos como pares ordenados, d) encontrar relaciones funcionales, e) predecir estados desconocidos utilizando los datos conocidos, f) identificar y describir patrones geométricos y numéricos; todo lo anterior como resultado del trabajo con estudiantes de diferentes niveles educativos

Caballero y Cantoral (2013) por su parte, afirmaron que para caracterizar el pensamiento variacional deben articularse los sistemas didácticos con las prácticas sociales que dan vida a la matemática desde la variación y el cambio; lo denominaron pensamiento y lenguaje variacional. Caballero y Cantoral en su trabajo con profesores presentan una caracterización de lo que ellos denominan pensamiento y lenguaje variacional (Pylvar) y la forma en que se desarrolla. Describen y caracterizan el Pylvar mediante los siguientes elementos: a) situación variacional, b) argumentos variacionales, c) códigos variacionales, d) estructura variacional, e) estrategia variacional, f) comparación, g) seriación, i) predicción, j) estimación, k) tareas, l) tabulación, m) análisis de datos en tablas y n) análisis gráfico.

Entre tanto, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006), tiene una visión más amplia acerca del pensamiento variacional relacionada con: reconocer, percibir, identificar, modelar, representar y caracterizar la variación y el cambio desde diferentes contextos.

La resolución de problemas por su parte ha hecho valiosos aportes, tanto en la investigación como en las prácticas en el aula. Investigadores como Polya (1945), Mason, Burton y Stacey (2010) y Schoenfeld (2016) han propuesto estrategias en la resolución de problemas, haciendo contribuciones significativas en este campo a la comunidad de educación matemática.

Según Mayer (2010), la resolución del problema se produce cuando el solucionador del problema se compromete con una actividad cognitiva dirigida a superar el problema y define la resolución de problemas, como un resumen de los procesos cognitvos centrados en el cambio de un estado dado, a un estado final, donde el procedimiento de solución no se reconce a simple vista. Para Polya (1981) la resolución de problemas es como encontrar una salida a una dificultad, una forma de sortear un obstáculo. Por su parte, Gagne (1965) caracterizó la resolución de problemas como el proceso mediante el cual la situación incierta es clarificada, e implica en mayor o menor medida, la aplicación de conocimientos y procedimientos por parte del solucionador.

Aunque los investigadores que han hecho aportes en las caracterizaciones del pensamiento variacional, al parecer tenían la intención común de comprender tanto el razonamiento como el pensamiento de los participantes, tanto las estrategias utilizadas, como sus resultados son variados. Los problemas o tareas utilizadas con los participantes en la mayoría de los casos involucran las temáticas de funciones, límites, continuidad y razones de cambio en dominios continuos.

Por lo anterior, la investigación que se realizó tuvo un enfoque diferente, utilizando como fuente de datos las acciones manifestadas por los participantes cuando solucionan problemas de ecuaciones lineales diofánticas con un enfoque cualitativo desde la teoría fundamentada. Las ecuaciones lineales diofánticas por su parte, se caracterizan porque se trabajan en el dominio de los números enteros. Por tanto, en la investigación se intentó dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿cómo es la naturaleza del pensamiento variacional manifestado por profesores de matemáticas en formación, cuando solucionan problemas de ecuaciones lineales diofánticas?

Metodología

Para Burton (1984), deben diferenciarse las operaciones del pensamiento cuando opera sobre problemas y la actividad matemática como tal. Por tanto, la primera acción dada, consiste en hacer claridad entre las operaciones del pensamiento variacional de los participantes cuando opera sobre problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma ax+by=c y los resultados de estas operaciones, manifestados por expresiones verbales y escritas de los participantes, que a su vez se convirtieron en los datos sobre los cuales se construyó la teoría.

El propósito de la investigación se centró en responder la pregunta de investigación acerca de ¿cómo caracterizar el pensamiento variacional manifestado por los participantes?, por tanto, se optó por un enfoque cualitativo con un diseño desde la teoría fundamenta, puesto que, lo que se busca es conocer la naturaleza del pensamiento variacional. Naturaleza en el sentido de cuáles son las propiedades y dimensiones que surgen del proceso de interpretar, dar sentido y describir los datos o las acciones manifestados por los participantes cuando su pensamiento opera sobre este tipo de problemas.

La estrategia y diseño de investigación desde la teoría fundamentada

Siguiendo a Corbin y Strauss (2008, 2017) y Charmaz (2014) la estrategia y diseño de investigación estuvo caracterizado por: a) trabajo simúltaneo entre la recolceción y análisis de datos, b) la construcción de códigos y categorías interpretando y dando sentido a los datos, no a hipótesis preconcebidas, c) se avanzó en la construcción de la teoría durante cada paso de recolección y análisis de datos, d) el muestreo fue dirigido a la construcción de la teoría, no a la representatividad de una población determinada, y e) el método de comparación constante, permeó siempre el proceso en la búsqueda de similitudes, diferencias y relaciones entre las categorías construidas.

La Figura 1, esquematiza la estrategia puesta en marcha con un diseño desde la teoría fundamentada. Se organizaron tres intervenciones con los participantes, cada una de ellas agrupó dos secuencias de aprendizaje y de forma simultánea se realizaron los procesos de codificación y análisis de datos.

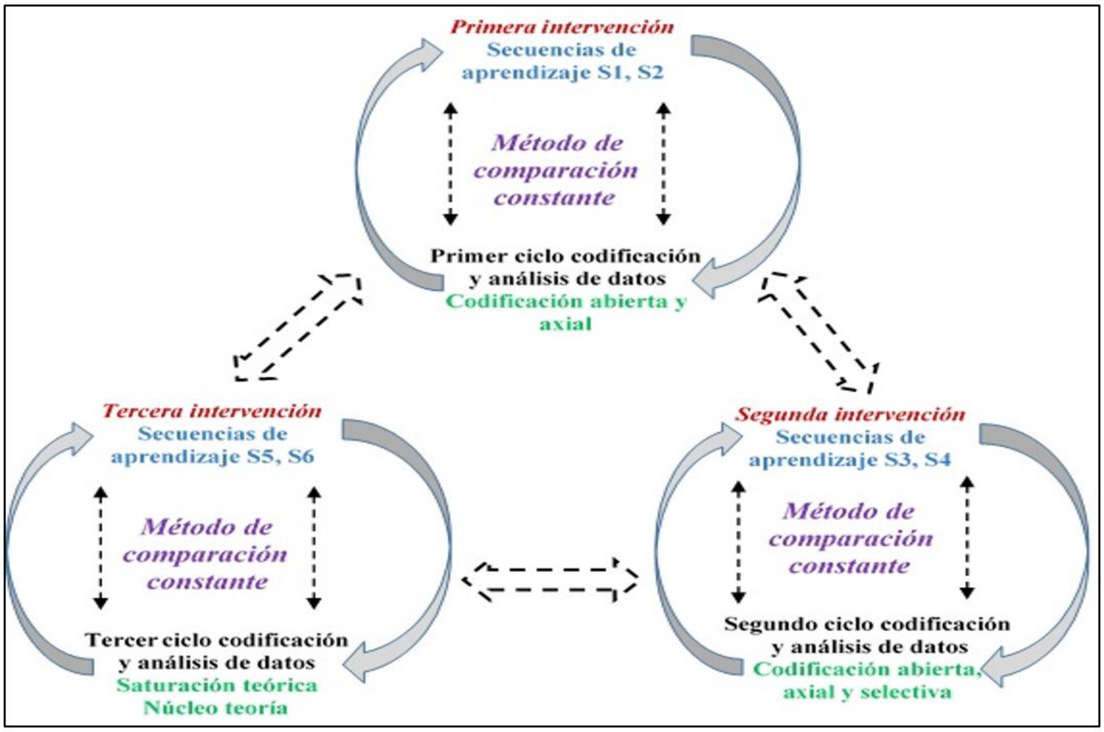

Figura 1. Estrategia desde la Teoría Fundamentada

Fuente: Autor

Los participantes

El estudio se realizó con 24 alumnos que tomaron un curso de Teoría de Números y se forman para ser profesores de matemáticas en la Universidad Francisco de Paula Santander, durante el I semestre del año 2020. La selección de los participantes se debe al propósito del estudio, de caracterizar el pensamiento variacional (el contenido del curso involucra la temática de ecuaciones diofánticas). Las edades de los participantes oscilaban entre 18 y 23 años.

Fuentes de datos

Se diseñaron, rediseñaron e implementaron 6 secuencias de aprendizaje que involucraban problemas relacionados con ecuaciones lineales diofánticas de la forma ax+by=c, como fuentes de datos. Cada secuencia se caracterizó por los siguientes elementos que conformaron su estructura: 1) encabezamiento, conformado por nombre de la institución, fecha, tiempo de la actividad, indicaciones, etc.; 2) introducción, fundamentada en temas específicos relacionados con la historia de la matemática; 3) desarrollo de la actividad, siempre se inició con el planteamiento al grupo, de un problema para que cada participante lo resolviera individualmente o intentara resolverlo con los conocimientos matemáticos a su disposición (la temática no se explicó antes, como se hace tradicionalmente), las demás tareas que los participantes debieron resolver se orientaron siempre por una serie de cuestiones con la intención de que elaboraran y construyeran su propio conocimiento desde la variación y el cambio; y 4) evaluación, conformada por una serie de problemas retadores.

Los procesos simultáneos de recolección, análisis de datos, construcción y evolución de la teoría

Luego de implementar la primera secuencia didáctica fueron seleccionados los resultados de siete participantes como los primeros incidentes. Se inicia el proceso de codificación donde surgen los primeros códigos o conceptos indicadores. Se denominan así puesto que surgen de los datos y son indicadores de ellos. Se analizan también las secuencias de aprendizaje, haciendo las correcciones y ajustes necesarios, orientando a los participantes para que solucionen los problemas desde la variación y el cambio.

Primer y segundo ciclo de codificación y análisis de datos: codificación abierta, axial y selectiva.

El proceso de codificación y análisis de datos, se inicia al seleccionar de manera intencional los primeros incidentes. Se denominan así, puesto que fueron los resultados escritos de los participantes que solucionaron de mejor manera las primeras cuestiones de la secuencia de aprendizaje que se denominó SA1. El análisis de datos se realiza a partir de signos, símbolos, fórmulas matemáticas, frase y afirmaciones en lenguaje natural de los participantes. Se analiza el trabajo de cada participante en la totalidad de la secuencia de aprendizaje y no pregunta a pregunta, con la intención de no perder el sentido de los datos.

El primer problema que se planteó a los participantes en SA1, fue: Dada la ecuación 6x+21y=102 con coeficientes enteros. Encuentre varias parejas de números enteros que se les puedan asignar a las variables x e y, de tal manera que la igualdad se cumpla. Escriba los posibles valores para estas variables en una tabla. Agregue una tercera columna, para que verifique la veracidad de la igualdad.

La Figura 2, muestra las acciones manifestadas por el participante que fue codificado como P15 SA1 ELDI. La codificación significa: P15 número asignado al estudiante, SA1, secuencia de aprendizaje 1, ELDI ecuaciones lineales diofánticas I, como el título de la secuencia de aprendizaje.

x	y	$6x + 21y =¿...?$
-11	8	$6(-11)+21(8)=102$
-4	6	$6(-4)+6(6)=102$
3	4	$6(3)+6(4)=102$
10	2	$6(10)+6(2)=102$
17	0	$6(17)+6(0)=102$
24	-2	$6(24)+6(-2)=102$

$$y=\frac{102-6x}{21}$$

$$y=\frac{102}{21}-\frac{6x}{21}$$

$$y=\frac{34}{7}-\frac{2x}{7}$$

Figura 2. Acciones P15 SA1 ELDI

Fuente: Autor

En la Figura 2, se observa que el participante interpreta la ecuación como una función y a partir de allí empieza a sustituir y combinar números enteros que hacen verdadera la ecuación.

Una estrategia desde la teoría fundamenta, es ir escribiendo memos a partir del análisis que se realiza. Estos memos contienen anotaciones del investigador acerca del cómo interpreta y les da sentido a los datos. En la investigación se construyeron tablas, como estrategia en el proceso de análisis y codificación.

En la Cuestión 2 de la SA1, se pedía: Analice la columna de los valores para la x. ¿Encuentra algún patrón o relación entre estos valores? Escríbalo. Haga lo mismo con la columna de los valores de la variable y. El participante P15 SA1 ELDI siguiendo tabla que construyó (Ver Figura 2):

P15: pues mirando la pendiente de la ecuación podemos ver que la diferencia entre cada valor de x es 7 y entre cada valor de "y" la diferencias es de 2.

Ante la cuestión 3, de la misma secuencia de aprendizaje: ¿Qué relación o qué condiciones considera usted que deben cumplirse para que se cumpla la igualdad?, explique, P15 responde:

P15: Que los valores de x y y, aumentan o disminuyen proporcionalmente en base a un valor que depende de la pendiente.

Siguiendo las manifestaciones, del estudiante P15 y los demás participantes, el análisis y proceso de codificación abierta, la Tabla 1 muestra la forma como se dio sentido a los datos, se elaboran y construyen los dos primeros conceptos indicadores, que se denominaron *sustitución variacional y combinación variacional, nexo variacional y conjetura variacional.*

Tabla I. Codificación abierta, acciones manifestadas por los participantes SA1 ELDI

Descripción	Interpretación	Propiedad	Dimensión	Concepto indicador
Asigna números enteros positivos y negativos que cumplan la ecuación	Utiliza el concepto de pendiente de la recta para asignar valores.	Asignar números	Tipos de números: enteros positivos y negativos	*Sustitución variacional*
Los valores de x e y aumentan o disminuyen proporcionalmente dependiente del valor de la pendiente.	En cada nueva solución los valores de x e y (*variables*) aumentan o disminuyen *(cambio)* en un valor constante	Números que cumplan la condición según la pendiente.	Diferentes soluciones dadas a la ecuación.	*Combinación variacional*
Los participantes empiezan a descubrir nexos entre las soluciones a la ecuación.	Relaciones iniciales entre los valores que pueden tomar las variables x e y, sus coeficientes y el valor de c.	Establecer nexos entre diferentes soluciones	Tipo de nexo entre los números que pueden tomar las variables x e y como solución a la ecuación.	*Nexo variacional*
Afirmaciones acerca de las posibles relaciones entre las soluciones a la ecuación.	Sustituye y combina números enteros, el estudiante empieza a construir relaciones entre estos ejemplos particulares	Relaciones iniciales entre las diversas soluciones a la ecuación	Tipo de afirmación acerca de los nexos entre diferentes soluciones	*Conjetura variacional*

Anotación: P15, utiliza el concepto de pendiente, desde dominios continuos. En contraste, en los problemas EDL en dos variables los coeficientes de $a + by = c$ son enteros y se busca solución en los enteros. Los demás incidentes manifiestan otras formas de los nexos, como: los valores de x aumentan de 7 en 7, mientras los valores de y, disminuyen de 2 en 2, pero los valores de x e y no aumentan o disminuyen al mismo tiempo.

Comentario: Cuando se sustituyen números *(lo que varía)* en las variables, se combinan y transforman las soluciones al pasar de un estado a otro. O lo que es lo mismo se pasa de una solución particular a otra solución particular *(lo que cambia)*. Cada participante elabora, construye y expresa las relaciones de forma diferentes.

Fuente: Autor

El proceso de codificación abierta y axial continua, la Tabla 2, evidencia como se dio sentido a los datos. Surge la categoría particularización variacional que tiene ahora por subcategorías sustitución y combinación variacional; mientras la categoría relación variacional absorbe el código o categoría nexo variacional.

Tabla II. Análisis de datos, codificación abierta y axial

Codificación abierta	***Codificación axial***		
Nombre código	*Nombre categoría*	*Propiedades*	*Dimensiones*
Sustitución variacional Combinación variacional	Particularización variacional	Sustituir, combinar parejas de números enteros.	Tipos de solución particular
Nexo variacional	Relación variacional	Afirmaciones que surgen de los nexos entre los diferentes valores que toman x e y como solución a la ecuación.	Tipos de afirmaciones acerca de los nexos entre soluciones a la ecuación

Variable: Sustituir y combinar números enteros que cumplan las condiciones para las variables x e y. Diferentes tipos de nexos que se establecen entre las diferentes soluciones.
Cambio: Las diferentes soluciones particulares a la ecuación diofántica lineal. Tipos de afirmaciones acerca de los nexos construidos.
Contexto y condiciones de intervención: Actividad inicial presencial en el salón de clase y en línea. Trabajo grupal e individual.
Estrategia: Secuencia de Aprendizaje 1 y 2. Tema: Ecuaciones Lineales Diofánticas I y II
Objetivo de aprendizaje: Construir estrategias y acciones para hallar soluciones en números enteros a ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$.
Estrategias de acción/interacción: Los estudiantes se proponen resolver problemas que involucran EDL utilizando diversas estrategias inductivas desde la variación y el cambio.
Consecuencias: cada estudiante puede generar diferentes estrategias para solucionar los problemas, así como diferentes formas de entender y de pensar el proceso.
Evidencia: Material impreso y digital.

Fuente: Autor

Los cuadros utilizados para la codificación axial presentan cambios sustanciales respecto a los cuadros de codificación abierta. Para analizar relaciones entre las categorías, Corbin y Strauss (2017) sugieren examinar los datos y los códigos basados en un paradigma de codificación que se centra y se relaciona con las condiciones causales, el contexto, las condiciones de intervención, las estrategias de acción-interacción y las consecuencias.

Tercera intervención, tercer ciclo de análisis de datos: construyendo el núcleo de la teoría

La intervención final con los participantes y el proceso de codificación selectiva tiene como propósito finalizar el muestreo teórico y saturar la teoría (nuevos datos, no aportan a las propiedades y dimensiones a las categorías ya construidas), además de la búsqueda de diferencias y similitudes entre categorías. Esto a su vez permitió la construcción de la categoría central o núcleo de la teoría caracterizado por su densidad de relaciones.

El esquema de la Figura 3, muestra la categoría central, junto a su densidad de relaciones que se denominó operaciones del pensamiento variacional como proceso en la resolución de problemas de ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax+by=c$.

Las flechas en un sentido se consideran como una necesidad previa, mientras que las de doble vía implican, un proceso de ida y vuelta permanente, cuando los participantes solucionan problemas.

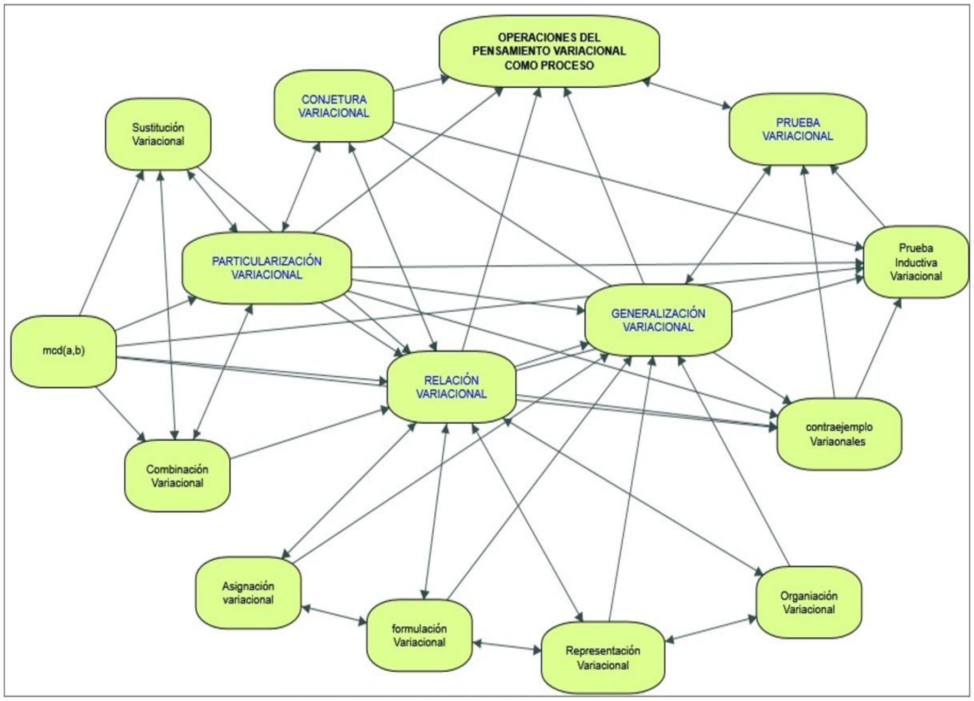

Figura 3. Categoría central y su densidad de relaciones

Fuente: Autores

Resultados

Finalmente, para dar respuesta a la pregunta de investigación, acerca de: ¿cómo es la naturaleza del pensamiento variacional manifestado por profesores de matemáticas en formación, cuando solucionan problemas de ecuaciones lineales diofánticas?, como resultado del trabajo simultaneo de recolección, los procesos de codificación y análisis de datos surge el núcleo de la teoría o categoría central que se denominó *operaciones del pensamiento variacional como proceso en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma ax+by=c.*

El proceso está compuesto por cinco categorías o subprocesos que se definieron como: *particularización variacional, conjetura variacional, relación variacional, formalización variacional, generalización variacional y prueba variacional*. A su vez cada subproceso lo componen unos sub subprocesos, como muestra el esquema de la Figura 4. Por ejemplo, el subproceso particularización variacional está compuesto por los subprocesos de combinar y sustituir variacionalmente, mientras que el subproceso formalización variacional lo componen los sub subprocesos de asignar, formular, representar, organizar y reorganizar variacionalmente, que conduce a los subprocesos de generalizar y probar.

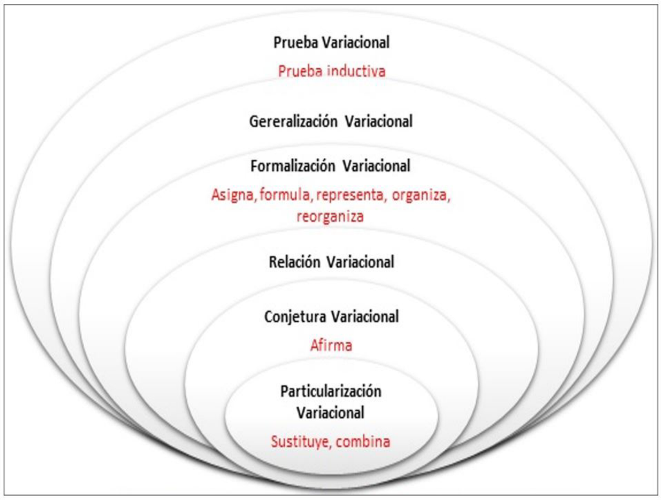

Figura 4. Pensamiento variacional como flujo de operaciones y acciones

Fuente: Autor

Siguiendo a Corbin y Strauss (2008, 2017) quienes afirman que un concepto desde la teoría fundamentada tiene dos características: unas propiedades que lo identifican y diferencian de los demás y cada propiedad tiene una dimensión consistente en el rango de variabilidad o dominio de esa propiedad. A continuación, se definen cada uno de ellos.

Particularización Variacional: Formas de sustituir y combinar números enteros positivos o negativos que hagan verdadera la ecuación. Lo que varía son las formas de sustituir y combinar y lo que cambia es el resultado como una nueva solución a la ecuación lineal diofántica $ax+by=c$.

Conjetura variacional: Afirmaciones acerca de los nexos que surgen en el proceso de particularización. Lo varía el tipo de afirmación, lo que cambia posible nueva relación.

Relación variacional: Tipos de relaciones que surgen de los procesos de particularización y conjetura. Lo que varía, la afirmación, lo que cambia, la veracidad de la conjetura.

Formalización variacional: formas de asignar letras, símbolos, signos para formular o crear expresiones matemáticas que cumplan las condiciones para hacer verdadera la ecuación. Lo que varía, las formas de asignar y formular. Lo que cambia una nueva expresión matemática que represente la situación del problema.

Generalización variacional: Fórmulas o expresiones matemáticas para generalizar el problema, además de diferentes acciones para organizar y reorganizar el conocimiento. Lo que varía, tipos de generalización y tipo de acciones para organizar el conocimiento. Lo que cambia, los nuevos estados, como resultados de los tipos de generalización.

Prueba inductiva: Tipos de ejemplos y contraejemplos para verificar las generalizaciones que surgen del proceso anterior. Lo que varía, tipos de ejemplos y contraejemplos. Lo que cambia, una nueva forma de prueba empírica.

Por otro lado, hay otro elemento fundamental como resultado del proceso, lo que se definió como acciones variacionales, que se diferencian de las operaciones variacionales:

Acciones Variacionales: manifestaciones escritas o verbales de los participantes cuando solucionaron problemas de ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax+by=c$. Por ejemplo, en la operación del pensamiento variacional particularizar, las acciones manifestadas son los diferentes números que utilizaron los participantes para sustituir las variables x e y que hicieron verdadera la ecuación.

Conclusiones

El enfoque cualitativo con un diseño desde la teoría fundamenta posibilitó elaborar y construir una caracterización del pensamiento variacional manifestado por el grupo de participantes cuando resolvieron problemas que involucran ecuaciones lineales diofántica de la forma $ax+by=c$. El trabajo aporta *una caracterización*, puesto que otro grupo de investigadores, desde otra mirada y otras perspectivas puede hacer otra caracterización diferente.

Las secuencias de aprendizaje y la estrategia puesta en marcha posibilitaron caracterizar el pensamiento variacional, como un flujo de acciones e interacciones permanentes entre los subprocesos de particularizar, conjeturar, relacionar, formalizar, generalizar y probar. Aunque, esta forma de presentarlo parece lineal, no lo es, puesto que cada participante tenía que ir y venir permanente sobre cada una de sus acciones para solucionar el problema. Además, cada participante lo hace de forma diferente.

Siguiendo el análisis de datos, los procesos de codificación (abierta, axial, selectiva) y haciendo una analogía con los trabajos de Confrey (1991), Confrey y Smith (1995) acerca del razonamiento covariaional y la teoría del razonamiento cuantitativo (Thompson y Thompson, 1992, Abril; Carlson, 1998; Thompson, 2011; Thompson P., Carlson, Byerley, y Hatfield, 2014; Thompson y Carlson, 2017), cuando los estudiantes representaron las infinitas soluciones a la ecuación en tablas (Ver Figura 2), ellos piensan que valores de las variables x e y, como soluciones a la ecuación cambian de forma independiente, cada una de ellas, pero esa variación y cambio se realiza de forma simultánea.

Entre tanto, la solución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax+by=c$, aunque al lector le parezcan fácil no lo son. Si se trabaja desde dominios continuos por ejemplo los números reales, la solución a este tipo problemas probablemente se limite a procedimientos algebraicos, sin sentido para el estudiante. En contraste, desde dominios enteros, donde se requieren soluciones enteras, exigen al solucionador ingenio, creatividad y la puesta en marcha de operaciones mentales desde la variación y el cambio; como ocurrió en este trabajo.

Por otro lado, y como se especificó en los resultados, el pensamiento variacional se caracterizó por dos aspectos cruciales: las operaciones variacionales del pensamiento a las que debieron recurrir los participantes para resolver el problema y las acciones variacionales que representan y evidencian estas operaciones. Consecuente con las afirmaciones acerca de la resolución de problemas, como las de Mayer (2010), Schoenfeld (2016), Mason, Burton y Stacey (2010), entre otros, como autores reconocidos en el tema.

Como resultado de la investigación, los autores consideran que: la caracterización realizada, proviene de los datos, esto desde el punto de vista de la fiabilidad. En cuanto a la replicabilidad o generalización en otros contextos, los resultados pueden ser muy diferentes, lo que, si se puede asegurar es que, si hacen los ajustes necesarios a las secuencias de aprendizaje, se puede contribuir aportar en caracterizar este tipo de pensamiento.

Finalmente, los resultados, muestran que la teoría fundamentada como enfoque, es una buena estrategia y aporta en investigaciones donde se pretenda caracterizar el pensamiento matemático, en este caso el pensamiento variacional. Además, el trabajo realizado muestra que es posible seguir avanzando en la caracterización del pensamiento variacional desde otros contextos y se podría caracterizar conjuntamente con otros tipos de pensamiento, por ejemplo, el pensamiento geométrico o combinatorio.

Referencias

Blanton , M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai , & E. Knuth (Edits.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education*. Berlin,Heidelberg: Springer

Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics*. Education, 15(1), 35-49. doi:10.2307/748986

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elmentos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 1197-1205). México, DF: Comité Latinaoamaericano de Matemática Educativa

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in Collegiate Mathematics Education* III, CBMS, 7, 114-162

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. Tempe, AZ: Arizona State University

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. En R. Mayes, R. Bonilla, L. Hatfield, & S. Belbase (Edits.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding*, (Vol. 2, págs. 55-73). Laramie: University of Wyoming

Castillo-Garsow, C., Johnson, H., & Moore, K. (2013). Chunky and smooth images of change. For the Learning of Mathematics, 33(3), 31-37

Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory* (2 ed.). Thousand Oaks, CA: Sage

Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. En L. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. Recent Research in Psychology (págs. 124-159). New York, NY: Springer

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 66-86. doi:10.2307/749228

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research:Techniques and procedures for developing grounded theory* (3 ed.). Thousand Oaks, CA, USA: SAGE Publications

Corbin, J., & Strauss, A. (2017). *Conceptos básicos de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada* (4 ed.). Thousand Oaks, California, United States of America: SAGE Publications

Gagne, R. (1965). The Conditions of Learning. Holt. *Rinehart and Winston*

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2 ed.). Harlow, UK: Pearson Education Limited

Mayer, R. (2010). Problem Solving and Reasoning. *International Encyclopedia of Education*, 273-278. doi:10.1016/B978-0-08-044894-7.00487-5

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado el 30 de 05 de 2020, de http://cms.mineducacion.gov.co/static/cache/binaries/articles-340021_recurso_1.pdf?binary_rand=1223

Piaget, J. (1970). Piaget's Theory. En P. Mussen (Ed.), *Carmichael's Manual of Child Psychology* (T. G. Gellerier & J. Langer, Trad., 3 ed., Vol. 1). New York: Wiley

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas*. México: Editorial Trillas

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. New York: Wiley

Saldanha, L., & Thompson, P. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1- 38. doi:10.1177/002205741619600202

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En K. James, J., D. Carraher, & M. Blanton (Edits.), *Algebra in the early grades* (págs. 133-160)

Thompson, P. (1990). A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic. *Center for Research in Mathematics & Science Education*

Thompson, P. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Edits.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Mongraphs* (Vol. 1, págs. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. (J. Cai , Ed.) *Compendium for research in mathematics education*, 421-456

Thompson, P., & Thompson, A. (1992, Abril). Images of rate. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. San Francisco*. Recuperado el 17 de 06 de 2020, de http://pat-thompson.net/PDFversions/1992Images.pdf

Thompson, P., Carlson, M., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra 1, 2, 3. En L. Steffe, L. Hatfield, & K. Moore (Ed.), *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, 4, págs. 1-24