Eco matemático ISSN: 1794-8231 (Impreso), E-ISSN: 2462-8794 (En línea) Volumen 13 (1) Enero-Junio de 2022, páginas 18-33

Un ejemplo de la aplicación de determinantes a la relación entre factores productivos: La Econofísica

An example of the application of determinants to the relationship between productive factors: The Econophysics

Henry Daniel Vera-Ramírez[a]

[a]PhD (c) en Historia de la Ciencia y la Tecnología, h.ramirez@campus.fct.unl.pt https://orcid.org/0000-0002-3977-3073, Universidad Nova de Lisboa.

Forma de citar: Vera-Ramírez, H. D. (2022). Un ejemplo de la aplicación de determinantes a la relación entre factores productivos: La Econofísica. *Eco Matemático,* 13 (1), 18-33

Recibido: 15 de junio de 2021
Aceptado: 23 de septiembre de 2021

Palabras clave

Dirac,
Preliminares,
Factores Productivos,
Labor,
Capital.

Resumen: El siguiente trabajo trata de hacer un acercamiento a la aplicación de los preliminares propuestos por la física desde los planteamientos de Paul Dirac. Los preliminares de Dirac, son un ejemplo de pensamiento divergente, que puede explicar la relación entre los factores productivos en diferentes países. Se intenta aplicar el determinante de las matrices obtenidas por el físico a una interacción de dos factores productivos clásicos: capital y trabajo, revisando las principales funciones de producción que han analizado esta relación. Finalmente, la aplicación del determinante se enfocó a analizar la ubicación de 11 países con relación con sus factores productivos. Se considera que la aplicación del determinante puede constituirse como un elemento de análisis para observar el comportamiento de la interacción entre estos factores productivos en diferentes países.

Keywords

Dirac,
Preliminaries,
Productive Factors,
Labor,
Capital.

Abstract: The following work tries to approach the application of the preliminaries proposed by physics from the approaches of Paul Dirac. Dirac's preliminaries are an example of divergent thinking, which can explain the relationship between productive factors in different countries. An attempt is made to apply the determinant of the matrices obtained by the physicist to an interaction of two classical productive factors: capital and labor, reviewing the main production functions that have analyzed this relationship. Finally, the application of the determinant was focused on analyzing the location of 11 countries concerning their productive factors. It is considered that the application of the determinant can constitute an element of analysis to observe the behavior of the interaction between these productive factors in different countries.

*Autor para correspondencia: h.ramirez@campus.fct.unl.pt

https://doi.org/10.22463/17948231.3350

Introducción

El interés de los economistas en la física como afirman Contreras y Larralde (2013), se ha enfocado sobre todo en la comprensión de los mercados financieros. En los años ochenta, los esfuerzos académicos de Wall Street, se concentraron en el análisis de datos del mercado, generando una masiva contratación de matemáticos y físicos, algunos de cuyos trabajos posteriormente han sido agrupados bajo la denominación de *Econofísica*. Estos trabajos han hecho énfasis en la física estadística, en los sistemas estocásticos y en el paradigma complejo. Otras relaciones entre ambos campos de conocimiento, están relacionados con el uso de conceptos como el de utilidad, que fue introducido por Daniel Bernoulli, intentando describir las preferencias de las personas. Otro ejemplo, el *paseo aleatorio*, se ha relacionado con el movimiento Browniano y como símil del movimiento de los precios en el mercado. La naturaleza de la materia ha otorgado campo de acción a la investigación de los denominados *sistemas complejos*, en los que supuestas pequeñas perturbaciones generarán efectos significativos, sistemas que han sido utilizados para explicar, por ejemplo, las crisis mundiales, el mercado accionario y la volatilidad de los precios, reconociendo el carácter racional de los agentes intervinientes. A este respecto:

[…] la dinámica de los sistemas económicos surge de la actividad de agentes, en ocasiones un gran número de ellos, cuyas decisiones afectan las opciones y perspectivas de otros agentes, todos con incentivos y objetivos más o menos heterogéneos. Sistemas de este tipo tienen los ingredientes y exhiben las propiedades de los sistemas complejos, y por lo tanto, las herramientas de la física estadística, procesos estocásticos y dinámica no lineal pueden ser de mucha utilidad para su análisis.

Por otra parte, se ha afirmado que toda la perspectiva neokeynesiana desde, por ejemplo, los planteamientos de Samuelson, se fundamentó en la idea de equiparar las leyes de la termodinámica (especialmente la segunda ley), al equilibrio de los sistemas económicos. Esta relación, sin embargo, no ha estado exenta de críticas. A este respecto plantea Soler:

[…] han venido surgiendo corrientes económicas heterodoxas que a partir de los diversos aportes de la física contemporánea y en particular la teoría energética de la física, ha realizado serios cuestionamientos a las teorías económicas convencionales. Dentro de este paradigma naciente se inscriben economistas como Daly, Georgescu-Roegen, Henderson, Kapp, Mishan, Naredo, Schumacher, entre otros, quienes plantean un enjuiciamiento al mecanicismo del sistema económico a la luz de la segunda ley de la termodinámica y plantean nuevos elementos para la construcción de sistemas económicos alternativos.

Por otro lado, no podemos desconocer la influencia de la economía neoclásica en el siglo pasado, y el hecho de que ésta ha insistido en introducir en el análisis económico marginal, un peso singular a los factores productivos trabajo y capital. Sin lugar a dudas, las economías capitalistas se soportan en una concentración sino excesiva por lo menos importante de estos factores, en detrimento de otros como la tierra, la tecnología y la innovación. Desde Solow (1961) y Denison (1961), han venido incorporándose estos nuevos aspectos al estudio de la dinámica económica. Los factores productivos han generado un profundo análisis que ha introducido modelos de crecimiento económico, generalmente expresados en funciones de diferentes tipos.

A continuación, encontramos la definición de ambos factores:

Trabajo, se refiere al tiempo que una persona dedica a la producción, trabajando en fábricas de automóviles, cultivando la tierra, enseñando en una escuela u horneando pizzas. Miles de ocupaciones y tareas, para todos los niveles de habilidades, las ejecuta el trabajo. Constituye el insumo más familiar y crucial de una economía industrializada avanzada…Los recursos de capital integran los bienes durables de una economía y se utilizan para producir otros bienes. Entre los bienes de capital están las máquinas, las carreteras, las computadoras, los martillos, los camiones, las acereras, los automóviles, las lavadoras y los edificios. Como se analizará más adelante, la acumulación de bienes de capital especializados resulta esencial para la tarea del desarrollo económico.

Esta definición neokeynesiana, es amplia y sintética, tal vez escrita para la comprensión general, sin ahondar en cuestiones mucho más propias de la disciplina económica, que requiere poder construir una estructura teórica que permita poder evidenciar métodos que aporten a la medición de estos factores y su influencia en la producción. En este orden de ideas, las funciones de producción estudiadas en microeconomía, generan un aporte significativo a la comprensión de la interrelación entre ambos factores. Las más comunes son: la función de producción lineal, -que presenta una similitud con la segunda ecuación estudiada en los preliminares de Dirac (1928)-, la función Cobb-Douglas, la función de producción de Leontief o de proporciones fijas y la función de producción de elasticidad de sustitución constante (CES), que, -como se verá más adelante-, es semejante a la primera ecuación de los preliminares de Dirac (1928), con la excepción del factor total de productividad (A) y de sus exponentes.

La relación existente entre los preliminares a la ecuación de Paul Dirac (1902-1984) y los factores productivos propuestos (capital y trabajo) no ha sido explorada. Sin embargo, resulta de especial interés profundizar en la relación existente entre el problema que encontró el físico y la posibilidad de plantear una similitud con algunas funciones de producción, que se basa, además, en la ingeniosa resolución encontrada por Dirac (1928), a las ecuaciones de sus preliminares. Esta tentativa, puede sugerir un nuevo campo de investigación que tenga en cuenta la apertura interdisciplinaria entre economía y física y en especial en la relación entre capital y trabajo.

En este sentido, el siguiente trabajo busca relacionar los preliminares de Dirac (1928), como dos ecuaciones que expresan posibles funciones de producción, a través de un ejemplo numérico de la productividad expresada por los factores capital y trabajo para un conjunto de once (11) países para el año 1998, información que se obtuvo de los trabajos de Aten, Heston & Summers (2002), Bernanke & Gürkaynak (2001) y Barro & Lee (2000). En principio se realizará una presentación de algunas de las principales funciones de producción estudiadas en microeconomía, seguido de un análisis *interproducción* entre países. Luego se hará una presentación formalizada de los preliminares de Dirac (1928), bajo el supuesto de que las variables expresadas en las ecuaciones se refieren a factores productivos capital y trabajo, para finalmente mostrar un ejemplo numérico que refleja cómo el determinante de la matriz que da solución a los preliminares de Dirac (1928), puede aportar elementos importantes en la comprensión de la relación entre ambos factores productivos.

Algunas Funciones de Producción

A continuación, se hará una presentación general de algunas de las funciones de producción más estudiadas: función Cobb-Douglas, función lineal, la función de producción de Leontiev o de proporciones fijas y la función de producción de elasticidad de sustitución constante (CES).

Función de producción Cobb-Douglas

Tal vez, uno de los modelos de crecimiento más estudiados, es el que considera a la producción como una función homogénea entre capital y trabajo junto a dos parámetros que representan las elasticidades de ambos factores. Esta función, que es denominada función Cobb-Douglas ha sido extensamente valorada y ha tenido un gran reconocimiento en la estructura teórica desde el enfoque neoclásico, no sin ciertas críticas.

La función Cobb-Douglas se expresa de la siguiente manera:

(1) $Q= f(K,L)$
(2) $Q= AK^{\alpha} L^{\beta}$

La producción está en función de los factores productivos capital y trabajo, donde:

Q=producción.
L=fuerza laboral
K=capital.
α=elasticidad del capital.
β=elasticidad de la fuerza de trabajo.
A=factor total de productividad.

Según Varian (1998):

Si la función de producción tiene la forma $f(x1, x2)=Ax_1^{a}x^{b}$, decimos que es una **función de producción Cobb-Douglas.** Tiene exactamente la misma forma funcional que las preferencias Cobb-Douglas…como la magnitud de la función de utilidad no era importante, suponíamos que $A=1$ y generalmente que $a+b=1$. Pero la magnitud de la función de producción sí lo es, por lo que tenemos que permitir que estos parámetros adopten valores arbitrarios. El parámetro A mide, aproximadamente, la escala de producción, es decir, el volumen de producción que se obtiene si su utiliza una unidad de cada factor. Los parámetros a y b miden la respuesta de la cantidad producida a las variaciones de los factores.

Un gráfico tradicional que muestra el comportamiento de la función, se encuentra a continuación:

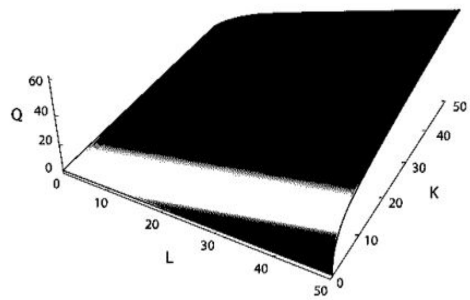

Figura 1. Función COBB-DOUGLAS.

Fuente: http://www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/508355

La homogeneidad de la función implica que la suma de las elasticidades es igual a 1:

(3) $\alpha+ \beta=1$

Sin embargo, esto supondría un axioma económico fundamental que tiene que ver con la idea de que el capital y el trabajo son eficientemente utilizados en la producción, lo que, desde el punto de vista del modelo es un elemento que contribuye a su robustez, pero que empíricamente supone que no se *desperdiciarían* y se usarían racionalmente ambos factores. Este elemento de simplificación, no se corresponde con la realidad y las curvas de eficiencia neoclásicas no contemplan en su análisis, el *desperdicio* de recursos. Ninguna nación o Estado trabajará eficientemente, ni utilizaría el capital de forma adecuada, ya que esto supondría desconocer la influencia de los elementos de incertidumbre y riesgo de los mercados.

Función de producción Lineal

Por otro lado, tenemos la función de producción lineal. Esta es una función lineal con dos factores que pueden expresarse de la siguiente manera:

(4) $q=f(k,l)=ak+bl$

Para el caso de esta función, se considera que presenta rendimientos constantes a escala. Para t>1,

(5) $f(tk,tl)=atk+btl=t(ak+bl)=tf(k,l)$.

Las isocuantas de esta función son líneas paralelas cuya pendiente es igual a (a-b/a). La tasa técnica de sustitución (TTS), para el caso de esta función es constante al largo de una isocuanta. Es como señala Nicholson (2007), una función muy útil, pero poco aplicable a la realidad, ya que supone que el capital y el trabajo son sustitutos perfectos el uno del otro. Esto quiere decir que una empresa solo podría utilizar capital y sustituirlo todo por trabajo y viceversa.

Función de producción de proporciones fijas

La función de producción de proporciones fijas implica que el capital y el trabajo deben ser utilizados en la misma proporción y se caracteriza porque las isocuantas de la misma tienen la forma de una "L". Si una unidad productiva llegase a ejecutar la producción con base en esta función, se encontrará que operará a lo largo de una recta en la que la proporción entre capital y trabajo *K/L* es constante. Esta función puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera:

(6) $q = \min(ak, bl) \qquad a,b>0,$

El operador "*mín*", implica que la producción está determinada por el menor de los dos valores entre *ak y bl*. De esto se deduce que la utilización de, por ejemplo, una mayor cantidad de trabajo **no** aumentará la producción y que por esta razón el valor del producto marginal será igual a 0. Un ejemplo de la aplicación de la función de producción de proporciones fijas la proporciona Nicholson (2007):

Por ejemplo, muchas máquinas exigen la presencia de una cantidad determinada de personas para operarlas, pero el exceso de trabajadores sería inútil. Considere la posibilidad de combinar capital (una segadora) y trabajo para labrar un campo. Siempre hará falta que una persona controle la segadora y uno de los factores sin el otro no producirá nada. Es posible que muchas máquinas sean de este tipo y que requieran un complemento fijo de trabajadores por máquina.

Una representación gráfica de la función de producción de proporciones fijas es la siguiente:

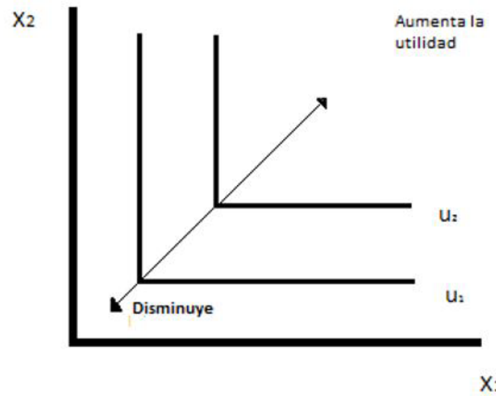

Figura 2. Función de Producción de Proporciones Fijas.

Fuente: Nicholson (2007).

Función de producción de Leontief

Un caso especial de función de producción fue enunciado por Leontief. Si se supone que una función de producción tiene la siguiente presentación:

(7) $q=f(k,l)=k+l+2\sqrt{(k*l)}$

La función exhibe rendimientos a escala:

(8) $f(tk,tl)=tk+tl+2t\sqrt{kl}=tf(k,l)$

Con respecto a las productividades marginales, podemos encontrar que estas se representan para el caso del capital:

(9) $$f_k = 1 + (\frac{k}{l})^{-0,5}$$

y para el caso del factor trabajo:

(10) $$f_l = 1 + (\frac{k}{l})^{-0,5}$$

Estas productividades marginales presentan dos características. Por un lado son positivas y por otro lado, son decrecientes. La tasa técnica de sustitución depende de la proporción de ambos factores:

(11) $$TTS = \frac{f_l}{f_k} = \frac{1+(\frac{k}{l})^{-0,5}}{1+(\frac{k}{l})^{-0,5}}$$

La tasa técnica de sustitución presentará una disminución en la medida en que disminuye la relación entre capital y trabajo (*k/l*). Las isocuantas presentan una forma convexa. La representación gráfica de la función de Leontief se comporta como una pirámide que reduce su proporción con respecto a los factores productivos. A continuación podemos encontrar su representación gráfica:

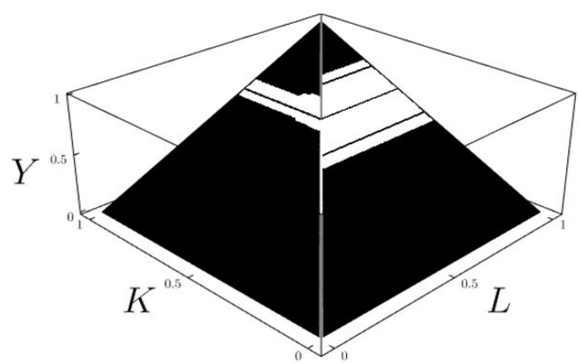

Figura 3. Función De Producción Leontief.

Fuente: http://www. Leontief.png (550 × 354 pixels, file size: 53 KB, MIME type: image/png)

Función de producción CES

Esta función, fue introducida por Arrow, Chenery, Minhas & Solow (1961) y se encuentra determinada por la siguiente ecuación:

(12) $$q = f(k,l) = [k^p + l^p]^{\frac{\gamma}{p}}$$

Para los casos en que:

(13) $p \leq 1, p \neq 0 \text{ y } \gamma < 1$

En el caso en que $\gamma > 1$, encontramos que la función tienen rendimientos crecientes a escala y en el caso contrario, cuando es menor a 1 tendrá rendimientos decrecientes. La tasa técnica de sustitución para el caso de esta función está dada por:

(14)

$$TTS = \frac{f_l}{f_k} = \frac{\frac{\gamma}{p} * q^{\frac{\gamma-p}{\gamma}} * pl^{p-1}}{\frac{\gamma}{p} ** q^{\frac{\gamma-p}{\gamma}} * pk^{p-1}} = [\frac{l}{k}]^{p-1} = [\frac{k}{l}]^{p-1}$$

Cuando esta función se expresa con muchos factores, tenemos que se enuentra determinada por:

(15) $$q = [\sum \beta_i x_i]^{\frac{e}{p}}, p \leq 1.$$

Esta función cumple con las siguientes condiciones:

- Para cada nivel de producción, esta función tiene rendimientos constantes a escala siempre que *e*=1 y en el caso en que *e* >1, presenta rendimientos a escala crecientes.

- La productividad marginal es decreciente para cada factor p ≤ 1.

- La elasticidad de la sustitución de factores, (para dos factores), es igual a:

(16) $$\sigma = \frac{1}{1-p}$$

La cual es igualmente admisible, cuando existe sustitución entre ambos factores. Habiendo hecho esta breve presentación de lagunas de las más reconocidas funciones de producción, se presenta a continuación una breve exposición sobre los planteamientos de Dirac.

Los Preliminares de Dirac.

En principio, Dirac (1928) busca encontrar una compatibilidad entre la mecánica cuántica descrita en principio por Schrödinger y la relatividad espacial. Dirac, parte de la ecuación de Schrödinger para un electrón en un campo electromagnético. La ecuación es la siguiente:

(1) $$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_{\Psi}$$

Donde:

Ψ= Ecuación de onda de la materia .
i= unidad imaginaria .
ħ=Constante de Planck, dividida entre 2π o constante de Dirac .
H= Hamiltoniano dependiente del tiempo en general, el observable corresponde a la energía del sistema .
t=tiempo.

En términos generales, lo que realizó Dirac, fue sustituir en esta ecuación, las variables clásicas por los operadores, de tal manera que tomando la ecuación relativista para la energía y teniendo en cuenta que la Energía E → $i\hbar\partial/\partial t$ y $p = -i\hbar\nabla$., encontró el impulso observable:

(2) $E= \sqrt{(m^2 c^4+c^2 p^2)}$

Una primera sustitución de (2) en (1), tendría el siguiente acercamiento:

(3) $$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \sqrt{m^2c^4 - (\hbar c)^2\nabla^2}\Psi$$

Mediante el desarrollo de la raíz del lado derecho, se obtiene una ecuación que es la siguiente:

(4) $E^2=m^2c^4+c^2p^2$

De esta ecuación se obtiene la ecuación de ondas:

(5) $$\left(\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Psi$$

Esta ecuación es conocida como a ecuación de Klein-Gordon. Dirac (1928), toma la decisión de mantener la primera derivada temporal junto a las derivadas primeras espaciales. Esto supone la utilización de la ecuación (1) de este apartado. La ecuación que surge es entonces:

(6) $$H = \alpha_0 mc^2 + \sum_{j=1}^{3}\alpha_j cp_j$$

Donde $p_j = -\frac{i\hbar\partial}{\partial x_j}$ el valor negativo de la raíz de -1 por la constante de Dirac derivada de la cual se espera que:

(7) $H^2 = (mc^2)^2 + \sum^3_{J=1} (cp_j)^2$

Los coeficientes α_μ evidentemente no pueden ser simples números, ya que igualando cuadrados se obtienen las siguientes condiciones:

(8) $\alpha^2_\mu=1 \quad \mu = 0,1,2,3$

(9) $\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 0 \quad \mu\neq\nu$

Dirac (1928), define el anticonmutador entre dos operadores A y B como:

(10) $\{A,B\}\equiv AB+BA$

Las ecuaciones (8) y (9), pueden resumirse de la siguiente manera:

(11) $\{\alpha_\mu \alpha_\nu\} = 2\delta\mu,\nu$

Estos operadores se pueden representar como matrices de tamaño nxn, mientras que ψ no se puede considerar un escalar, sino que es un vector de n dimensiones:

(12) $$\psi(r,t) = \begin{pmatrix} \psi_1(r,t) \\ . \\ . \\ . \\ \psi_n(r,t) \end{pmatrix}$$

Esta matriz se conoce como *espinor*. Lo esencial en este planteamiento es la forma en que descubre los denominados anticonmutadores $\{A,B\} \equiv AB+BA$ y como se relaciona con la resolución para el caso de matrices, hasta determinar el tamaño de estas matrices.

Planteamiento para dos factores productivos.

En principio, se supondrá la existencia de dos (2) factores productivos a saber, capital (K) y trabajo (L) . Supondremos además que ambos factores tendrán crecimientos exponenciales, de tal manera que:

(1) $$Q = [K^p + L^p]^{\frac{1}{p}}$$

Donde:
Q=nivel de producción.
K=factor capital.
L= factor trabajo.
p=rendimiento exponencial de los factores productivos.

Es importante aquí introducir la siguiente restricción. Teniendo en cuenta que el capital y el trabajo no serán en ningún momento y bajo ninguna forma *eficientes*, ni en un sentido paretiano, ni desde el punto de vista de las elecciones racionales, el valor p, no podrá ser en ninguno de los casos igual o superior a 1. Entonces:

(2) $$Q = [K^p + L^p]^{\frac{1}{p}}$$

Sujeto a:

(3) $p < 1$

Por otro lado, podemos afirmar que la producción es igual a un coeficiente de rendimiento del capital, multiplicado por dicho factor, sumado con un coeficiente de rendimiento del trabajo multiplicado por el factor trabajo. De tal manera que podemos expresar esta segunda entidad de la siguiente manera:

(4) $Q = aK + bL$

Donde:

Q=nivel de producción.
a=coeficiente de rendimiento del capital.
K=factor capital.
b=coeficiente de rendimiento del trabajo.
L=factor trabajo

Supondremos además, que los coeficientes del rendimiento de ambos factores representan su elasticidad, pero tendremos en cuenta, al igual que en la ecuación (4), que estas elasticidades serán inferiores a 1, por cuanto no existe un aprovechamiento intensivo y eficiente de tales factores. Por tanto:

(5) $a < 1$
(6) $b < 1$

Aquí, además, no supondremos su homogeneidad como en la ecuación Cobb-Douglas. Si ahora igualamos las ecuaciones (2) y (4), tendremos la siguiente expresión:

(7) $$[K^p + L^p]^{\frac{1}{p}} = aK + bL$$

Podría afirmarse hasta aquí que esta igualdad implica rendimientos crecientes de los factores capital y trabajo, pero no eficientes. Por otro lado, debemos introducir en el modelo la siguiente consideración. Entre más significativos sean los rendimientos del trabajo y del capital, menor será el rendimiento de la sumatoria de ambos factores de tal manera que se tengan en cuenta las economías de escala en largo plazo. Sin embargo, se bebe tener en cuenta la siguiente consideración. En algún momento, el uso de los factores implicaría que los rendimientos, tanto del capital como del trabajo, se igualarán al rendimiento conjunto de ambos factores.

Si esto es aceptado, tendremos la siguiente situación para un crecimiento de los factores productivos con exponente dos (2):

(8) $[K^2 + L^2]^{\frac{1}{2}} = aK + \mathrm{b}L$

Que puede expresarse también como:

(9) $\sqrt{K^2+L^2)} = aK + bL$

Esto es precisamente la expresión de Dirac. Para cada uno de los casos de crecimiento exponencial igual o mayor a 2, tendremos:

$$[K^3 + L^3]^{\frac{1}{3}} = aK + bL$$
$$[\mathrm{K}^4 + L^4]^{\frac{1}{4}} = aK + \mathrm{b}L$$
$$\vdots$$

(10) $[K^q + L^q]^{\frac{1}{q}} = aK + \mathrm{b}L$

Para toda q mayor a 2.

(11) $q > 2$

Vamos ahora a establecer la solución para la situación en la que los rendimientos de los factores productivos y el incremento exponencial de ambos, se considera como su cuadrado, es decir, tal y como se expresa en la ecuación (*8*):

(12) $[K^2 + L^2]^{\frac{1}{2}} = aK + \mathrm{b}L$

Si suponemos que aK+bL, elevado al cuadrado iguala a la suma de ambos factores elevados a un exponente de crecimiento, tendremos la siguiente expresión:

(13) $K^2 + L^2 = (aK + bL)\ (aK + bL)$

Si resolvemos el lado derecho de la igualdad, tendremos la siguiente expresión:

(14) $K^2 + L^2 = a^2\ K^2 + 2\ aK\mathrm{bL} + b^2\ L^2$

Es decir, la sumatoria de los cuadrados de los factores productivos son equivalentes a la elasticidad del capital elevado al cuadrado y multiplicado por el valor del factor elevado también al cuadrado más dos veces la multiplicación de ambas elasticidades y los factores productivos. Finalmente se suma la elasticidad del trabajo elevada al cuadrado por el factor trabajo elevado al cuadrado.

Aquí, es donde la situación encontrada es contradictoria, ya que para que la ecuación sea igualable, supondría que las elasticidades del capital sean ambas iguales a 1 y que sean a su vez iguales a 0, para el caso de la expresión 2aKbL. Es decir:

(15) $a = b = 1$
(16) $a = b = 0$

Esto es contradictorio para los siguientes supuestos o condicionamientos. En primer lugar, que ambas elasticidades no pueden representar a su vez valores a=b=1 y a=b=0; y por otro lado, el supuesto de que ambas elasticidades son inferiores a 1. De tal manera que no se cumple que:

(17) $a < 1$
(18) $b < 1$

Aquí, la tenaz apreciación de Dirac, adquiere vital trascendencia por cuanto tenemos que considerar la siguiente situación: supongamos que la multiplicación de las elasticidades de ambos factores difiere de la siguiente manera. La multiplicación del valor de la elasticidad del valor trabajo, es diferente a la multiplicación del valor trabajo por la elasticidad del capital, es decir :

(19) $ab \neq ba$

Este nivel de abstracción, supone ubicarnos en otro nivel, ya que si volvemos a la ecuación (13):

(20) $[K^2 + L^2]^{\frac{1}{2}} = aK + \mathrm{b}L$

Podemos expresarla de la siguiente manera:

(21) $\sqrt{}K^2 + L^2 = a^2 K^2 + KL\ (\mathrm{ab+ba}) + b^2 L^2$

Es decir a=1; b=1 y (ab+ba)=0. Para que esto se cumpla, tendremos que ubicarnos en el álgebra matricial, a saber, suponer que tanto a, como b, es decir, las elasticidades de ambos factores corresponden a matrices. Consideremos una matriz expresada para a y b, como:

(22) $$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Para este par de matrices se encuentra que ambas elasticidades no tienen solución. Para una matriz de *3x3* de la siguiente manera:

(23)
$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

La situación que se encuentra para una matriz de *3x3* no presenta ninguna solución. Pero para una matriz de 4x4, como la siguiente:

(24)
$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

La solución encontrada para estas dos matrices es la siguiente :

(25)
$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ahora multiplicamos la matriz a, es decirla elasticidad del capital por el factor capital, tendremos:

(26)
$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * K \quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a^2 = b^2 = 1$, entonces la matriz que expresa esta solución es la matriz identidad con 1 en su diagonal:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y si se supone que (ab+ba)=0, entonces:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y si multiplicamos la matriz b, es decir, la elasticidad del factor trabajo, tendremos:

(27)

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * L \quad = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L \end{pmatrix}$$

En este sentido, la suma de las elasticidades de los factores, puede expresarse como la sumatoria de las matrices aK + bL, de la siguiente manera:

(28)

$$aK \quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + bL = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L \end{pmatrix}$$

De tal manera que obtenemos:

$$aK + bL = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & K \\ 0 & L & K & 0 \\ 0 & K & -L & 0 \\ K & 0 & 0 & -L \end{pmatrix}$$

(29)

La ecuación (13), puede expresarse en términos de matrices de la siguiente manera:

(30)

$$\sqrt{\begin{pmatrix} K^2+L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^2+L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^2+L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^2+L^2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & K \\ 0 & L & K & 0 \\ 0 & K & -L & 0 \\ K & 0 & 0 & -L \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a:

(31)

$$\begin{pmatrix} K^2+L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^2+L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^2+L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^2+L^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & K \\ 0 & L & K & 0 \\ 0 & K & -L & 0 \\ K & 0 & 0 & -L \end{pmatrix}^2$$

El determinante de la matriz a**K** + bL, es equivalente a:

$$Det = K^8 - 4K^6 L^2 + 6K^4 L^4 + 4K^2 L^6 + L^8$$

Cuyo resultado contribuiría a determinar el peso relativo de las factores productivos obre cada una de los datos de capital y trabajo.

Resultados

En el siguiente cuadro encontramos un ejemplo numérico de los países referenciados para el año 1998:

Cuadro 1. Determinante de la Interacción de los Factores Productivos con Relación a Estados Unidos.

País	Determinante $(K^8 - 4K^6L^2 + 6K^4L^4 + 4K^2L^6 + L^8)$
Estados Unidos	13
Canadá	13,14
Japón	36,41
Finlandia	15,89
Reino Unido	2,73
Corea del sur	3,4
México	0,31
Perú	0,34
India	0,04
Kenia	0,03
Tanzania	0,01

Fuente: Construcción propia sobre los datos de Aten, Heston & Summers (2002), Bernanke & Gürkaynak (2001), Baro & Lee (2000).

En la siguiente gráfica, encontramos el determinante para cada uno de los casos, como se observa Japón, Canadá y Finlandia, presenta un determinante de factores productivos mayor que el de Estados Unidos, lo que supone una mayor intensidad en el uso de ambos factores. Sobresale Japón, con un determinante que casi triplica el de Estados, pero el mismo presenta similares valores para Finlandia y Canadá.

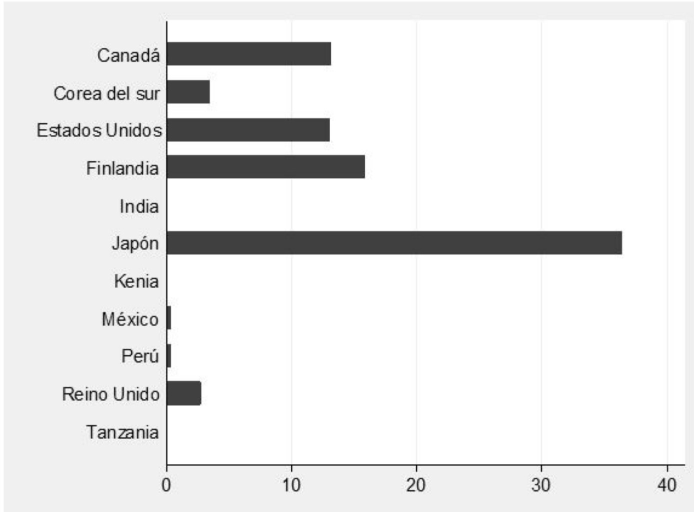

Figura 3. Valores del Determinante de Valores Productivos para Varios Países.

Fuente: Autor sobre los datos de Aten, Heston & Summers (2002), Bernanke & Gürkaynak (2001), Baro & Lee (2000).

Factores productivos e *interproducción*.

En la siguiente tabla, se encuentra la relación existente entre el aprovechamiento de factores productivos, de diferentes países con referencia a los Estados Unidos para el mismo año:

Cuadro 2. Output, Factor de Acumulación y Productividad con Relación a Estados Unidos.

País	Output por trabajador, *y*	Capital físico por trabajador, *k*	Capital Humano por trabajador, *h*	Factores de producción $K^{1/3}h^{2/3}$	Productividad, *A*
Estados Unidos	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Canadá	0,7600	1,0200	0,9800	0,9900	0,7700
Japón	0,7400	1,3700	0,8700	1,0000	0,7300
Finlandia	0,7100	1,1400	0,8900	0,9600	0,7400
Reino Unido	0,7000	0,8000	0,8200	0,8100	0,8700
Corea del sur	0,4400	0,7500	0,9200	0,8600	0,5100
México	0,3200	0,3600	0,7400	0,5800	0,5500
Perú	0,2000	0,2400	0,7700	0,5200	0,3900
India	0,0860	0,0470	0,5500	0,2400	0,3500
Kenia	0,0410	0,0210	0,5300	0,1800	0,2300
Tanzania	0,0150	0,0190	0,4500	0,1600	0,0940

Fuente: Autor sobre los datos de Aten, Heston & Summers (2002), Bernanke & Gürkaynak (2001), Barro & Lee (2000).

Si se desea hacer una comparación de la productividad que se encuentra entre países, se debe dividir cada una de sus funciones de producción. De tal manera que en la ecuación cuatro (4), el primer término del segundo miembro multiplica el cociente entre las productividades. Como resulta obvio, si ambos países presentan la misma acumulación de factores, el cociente entre sus niveles de producción sería igual al cociente entre los niveles de acumulación de factores. Esta es la ecuación de comparación interproducción:

$$\frac{y_i}{y_j} = \left(\frac{A_i}{A_J}\right) * \left(\frac{K_i^{\alpha} * h_i^{1-\alpha}}{K_j^{\alpha} * h_j^{1-\alpha}}\right) \quad (1)$$

Esta, permite medir las diferencias de productividad, teniendo en cuenta que dos de los tres términos pueden observarse directamente. Dicha ecuación cumple con las siguientes condiciones, a saber:

i) Entre mayor sea el cociente entre los diferentes niveles de producción la diferencia en la productividad será mayor.

ii) Cuanto mayor sea la diferencia de acumulación entre factores productivos en ambos países, menor será la diferencia de productividad encontrada.

La siguiente ecuación compara mediante una razón, las productividades de ambos países como una razón equivalente entre la producción de ambos países dividido en el uso y acumulación de los factores productivos. El peso específico de los factores productivos en cada país hará que disminuya la productividad, siempre y cuando se observen niveles de producción relativamente estables.

$$\left(\frac{\boldsymbol{A_i}}{\boldsymbol{A_j}}\right) = \frac{\left(\frac{\boldsymbol{y_i}}{\boldsymbol{y_j}}\right)}{\left(\frac{K_i^{\alpha} * h_i^{1-\alpha}}{K_j^{\alpha} * h_j^{1-\alpha}}\right)} \quad (2)$$

Así, el crecimiento económico desde una perspectiva neoclásica, se ha concentrado en modelos que han estudiado la relación entre estos factores productivos. A continuación encontramos el comportamiento del Output por trabajadora, el capital físico por trabajador, el capital humano por trabajador, los factores de producción y la productividad, con el país de referencia Estados Unidos, de acuerdo a los datos del cuadro 2:

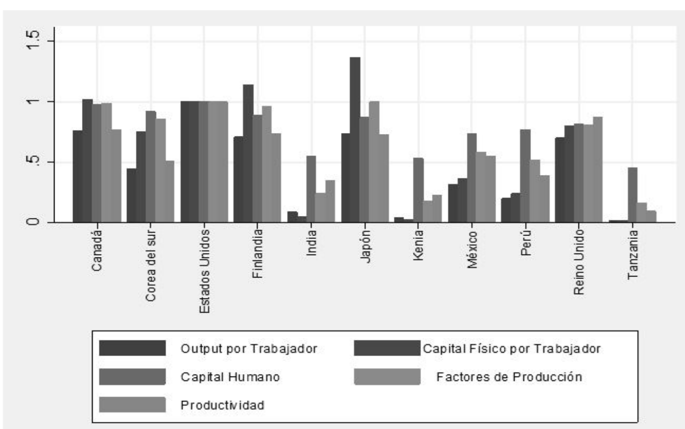

Figura 4. Valores del Output, Factor de Acumulación y Productividad con Relación a Estados Unidos.

Fuente: Autor sobre los datos de Aten, Heston & Summers (2002), Bernanke & Gürkaynak (2001), Barro & Lee (2000).

Por ejemplo, Lucas (2002), al analizar el modelo de crecimiento presentado por Solow y Denison (1961), sobre el crecimiento de los Estados Unidos afirma:

Las principales contribuciones del marco neoclásico, mucho más importantes que sus aportes a la claridad de las discusiones puramente cualitativas, surgen de su capacidad para cuantificar los efectos de diversas influencias del crecimiento…los supuestos claves están relacionados con la movilidad de los factores: ¿pueden la gente y el capital moverse libremente? Lo más fácil es empezar por el supuesto de no movilidad, porque entonces podemos tratar a cada país como un sistema aislado…En este caso, el modelo pronostica que los países con las mismas preferencias y tecnología convergerán hacia niveles idénticos de ingreso y tasas asintóticas de crecimiento.

La suposición de que los factores productivos no se mueven entre países, disminuye la versatilidad de los modelos neoclásicos, ya que el análisis de la productividad de cada país, estaría sesgado por la incuestionable realidad del comercio y la posibilidad de movilidad de los factores en las economías poscapitalistas. En este sentido, si bien, el presente análisis se sustenta en la apreciación de factores productivos endógenos, no deja de considerar el hecho fundamental de la importancia de la movilidad de factores. La anterior aplicación se sustenta en la importante formulación propuesta por Dirac (1928), e intenta de alguna manera, acercarse a una interacción entre capital y trabajo, tratando de contribuir de manera significativa a un avance en el entendimiento de la relación entre ambos factores.

Discusión

Estas ecuaciones, resueltas brillantemente por el físico, tienen similitudes con algunas funciones de producción y podría afirmarse que la solución encontrada por Dirac puede contribuir al análisis de la relación de los factores productivos: capital y trabajo. El ejemplo utilizado, explica una posición de ventaja ocupada para los Estados Unidos y Japón con respecto a otros países. Sin embargo, vemos un valor importante del determinante en Canadá y Finlandia. Desafortunadamente, países como Tanzania, Perú, México y Kenia tienen un determinante con un valor inferior a 0. La clasificación con respecto a la medida cuantitativa sobre la relación entre los factores productivos muestra un mejor nivel en países con ingresos altos frente a países con bajos niveles de ingreso. El factor determinante será una oportunidad para investigar sobre la elección del factor más importante en cada país.

Por otro lado, el estudio de las interacciones entre factores, también puede convertirse en un mecanismo de relación interdisciplinaria entre física y economía, dejando de lado la relación tradicional entre ambas disciplinas, que se ha centrado principalmente en el análisis estocástico de precios, su relación con el movimiento. Browniano y el análisis discreto y complejo. Por otro lado, es una forma analógica de evidenciar interacciones entre modelos de ambas ciencias, con el objetivo de contribuir al desarrollo económico, sin descuidar los fundamentos esenciales de la ciencia económica, en términos de las funciones de producción tradicionalmente aceptadas y estudiadas.

En términos generales, se puede afirmar que las matemáticas proveen un campo especial de análisis en la relación entre factores productivos y preliminares de Dirac. Sobre esta interdisciplinariedad afirma Rojas-Gómez (2017):

La interdisciplinariedad en las ramas de las matemáticas está a la base de la introducción de los objetos matemáticos necesarios para desarrollar una teoría matemática, la manera como la preparación en el análisis, el álgebra, la geometría y porque no, la física; cómo éstas se definen y se integran permite una especialización superior, sea para enfrentar una carrera universitaria técnico - científica, sea para enfrentar un mundo social basado en la innovación tecnológica que nos exige la necesidad de enfrentar generaciones que aprenden en una manera veloz y hacen uso de instrumentos tecnológicos avanzados que propician un aprendizaje simultáneo y necesario ya que el utilizo de los mismos instrumentos requiere un aprendizaje que está a la base (Rojas Gómez, 2017, p. 52).

Con relación específica a la posibilidad de proyección del presente trabajo a espacios como el colombiano y en general de países en desarrollo, es importante reconocer que la profundización en aspectos interdisciplinarios, puede contribuir de manera significativa a evaluar de forma heurística, elementos relativos a la incorporación de factores productivos en la mejora de la estructura empresarial en sus capas micro, mediana y corporativa, así como en el avance interno en la innovación y creatividad enfocados al mismo proceso.

Si bien el presente documento hace referencia a una posible limitación del ejercicio por haberse centrado en el año 1998, la incorporación de factores productivos no involucra un punto de quiebre sostenido formalmente, sino que implica avances en diferentes áreas de la producción que puede extenderse a periodos posteriores.

Referencias

Arrow Kenneth J, Chenery H B, Minhas B S & Solow Robert. (1961). Capital-labor substitution and economic efficiency. Rev. Econ. Statist. 43:225-50

Barro, R, J. & Jong-wha L. (2000). "International Data On Educational Attainment: Updates And Implications". *Oxford Economic Papers*, 53(3) July: 541-563.

Bernanke, B., & Gürkaynak, S. (2001). *Is growth Exogenous? Taking Mankiw, Romer and Weil seriously*. MIT.Press.

Bjorken, J., D. & Drell, S. (1964). *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill.

Cobb, C.W. & Douglas, P. (1928). "A Theory of Production". *American Economic Review 18* (supplement): 139-165.

Cobb, C.W. & Douglas, P. (1948). "Are there Laws of Production?". *The American Economic Review* 38: 1-41.

Contreras, A. & Larralde, H. (2013). *Econofísica*. En: Fronteras de la Física en el siglo XXI. Miramontes, Octavio. & Volke, Karen (Editores). Coplt-arXives. México D.F.

Cottingham, N, & Greenwood, D, A. (1998). *An introduction to the Standard Model of Particle Physics*. Cambridge University Press.

Dirac, P. (1928). *The Quantum Theory of the Electron.* St. John´s College, Cambridge. (Communicated by R.H. Fowler, F.R.S.-Received January 2, 1928.

Dirac, P. (1968). *Principios de mecánica Cuántica*. Ed. Ariel. España.

Douglas. Paul, H. (1934). *The Theory of Wages*. New York. The Macmillan Co.

Fisher, F. M. (1992). *Aggregation. Aggregate Production Functions and Related Topics.* Cambridge, MA: The MIT Press.

Gallo, A, Manrique, J & Prada, R. (2017). "Aplicación de la ingeniería didáctica en el aprendizaje del concepto de función". *Eco Matemático* 8(1): 43-48.

Lawkin, K. (1968). *Introducción a la Física Atómica*. Ed. Norma.

Lucas, R. (2002). Lecturas sobre crecimiento económico. Grupo Editorial Norma y Uniandes.

Mandl, F & Shaw, G. (1986). Quantum Field Theory. John Wiley & Sons.

Mankiw, G. (2004). *Macroeconomía: 93-96*. Antoni Bosch editor.

Mantegma, R. & Stanley, H. (2000). *An Introduction to Econophysics*. Cambridge University Press.

Mayumi, K, Giampetro, M, & Ramos-Martín, J. (2012). "Reconsideration of dimensions and curve fitting practice in view of Georgescu-Roegen´s epistemology in Economics". *Romanian Journal of Economic Forecasting*, 4: 17-35.

Nicholson, W. (2007). *Teoría Microeconómica. Principios básicos y ampliaciones*. 9 Ed. Ed. Thomson.

Ormerod, P (2010). "Econophysics and The Social Sciences: Challenges and Opportunities". *Journal of Natural and cultural sciences*. 76: 345-35.

Prescott, E. (1986). "Theory ahead of business cycle measurement". *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*: 9-22.

Rojas, J. (2017). "El pensamiento Abstracto a partir de la interdisciplinariedad de las Matemáticas". *Eco Matemático.* 8 (s1): 51 - 53.

Samuelson, P., & Nordhaus, W. (2010). *Economía con aplicaciones a Latinoamérica.* 19 ed. Ed. Mac Graw Hill.

Solow, R. (1957). "Technical Change and the Aggregate Production Function". *Review of Economics and Statistics* 39: 312-320.

Soler, Y. (s.f). *Diálogos de la Economía con otras ciencias.* Asociación de Economistas de la Universidad Nacional de Colombia (AEUN). Facultad de Ciencias Económicas.

Aten, B, Heston, A, & Summers, R. (2002). Penn World Table Version 6.1. Center for International Comparisons. University of Pennsylvania (CICUP).

Varian, H. (1998). *Microeconomía intermedia un enfoque actual*. 4 ed. Ed. Antoni Bosch. Barcelona