Eco matemático ISSN: 1794-8231 (Impreso), E-ISSN: 2462-8794 (En línea) Volumen 13 (2) Julio-Diciembre de 2022, páginas 40-52

Perspectivas infinitesimales en la caracterización de diagramas asociados a los discursos de Gottfried Wilhelm Leibniz

Infinitesimal perspectives in the characterization of diagrams associated with Gottfried Wilhelm Leibniz's speeches

Anyelo David Moreno-Henao[a], Sol Karina Vega-Medina[b], Alberto Forero-Poveda[c]

[a]Bachiller académico, admorenoh@udistrital.edu.co, https://orcid.org/0000-0002-4164-6962, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
[b]Bachiller académico, skvegam@udistrital.edu.co, https://orcid.org/0000-0002-0899-8464, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
[c]Maestría en ciencias Matemáticas, aforerop@udistrital.edu.co, https://orcid.org/0000-0002-0452-7876, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Forma de citar: Moreno-Henao, A. D., Vega-Medina ,S. K., Forero-Poveda, A. (2022). Perspectivas infinitesimales en la caracterización de diagramas asociados a los discursos de Gottfried Wilhelm Leibniz. *Eco Matemático,* 13(2), 40-52. https://doi.org/10.22463/17948231.3664

Recibido: 8 de Noviembre de 2021
Aceptado: 4 de Abril de 2022

Palabras clave

Actividad Matemática, Diagrama, Educación Matemática, Infinitesimales, Infinito, Práctica Matemática.

Resumen: La práctica matemática está vinculada con diversos discursos y actividades matemáticas consolidadas por autores, manifestándose en métodos y elementos que pueden ser objeto de análisis en los trabajos de investigadores en didáctica de la matemática cuya intención es analizar, caracterizar y reflexionar esta práctica. Una manera de analizar los elementos referidos es haciendo uso de diagramas (Entendidos como herramientas cognitivas) que permiten reconocer algunos alcances dispuestos en los abordajes. Con lo anterior se resalta el hecho de hacer un seguimiento continuo de la situación y su resolución desde el punto de vista matemático, sin embargo, es de resaltar que para hacer este tipo de ejercicios rigurosos es necesario usar los escritos originales del autor, en este caso, Gottfried Wilhelm Leibniz. Por esta razón, el presente trabajo referirá elementos vinculados con el discurso sobre las perspectivas infinitesimales, orientado principalmente en el tratamiento, la necesidad del diagrama y las actividades matemáticas inmersas. Posteriormente, se pondrá en consideración el análisis construido frente a los abordajes que Leibniz realizo en cada documento y las apreciaciones sobre la pertinencia de dichos diagramas al usarlos en la educación matemática.

Keywords

Math Activity, Diagram, Mathematics Education, Infinitesimals, Infinite, Math Practice.

Abstract: Mathematical practice is linked to various discourses and mathematical activities consolidated by authors, manifesting itself in methods and elements that can be the object of analysis in the work of some people whose main intention is to characterize their practice. One way of analyzing the referred elements is by making use of diagrams (understood as cognitive tools) that allow to recognize some scopes arranged in the approaches. The above highlights the fact of making a continuous monitoring of the situation and its resolution from the mathematical point of view, however, it should be noted that to make this type of rigorous exercises it is necessary to use the original writings of the author, in this case, Gottfried Wilhelm Leibniz. For this reason, the present work will refer to elements linked to the discourse on infinitesimal perspectives, oriented mainly on the treatment, the need for the diagram and the mathematical activities involved. Subsequently, we will consider the analysis constructed in relation to the approaches that Leibniz made in each document and the appreciations on the pertinence of these diagrams when using them in mathematics education.

*Autor para correspondencia: skvegam@correo.udistrital.edu.co

Doi: https://doi.org/10.22463/17948231.3664

Introducción

El estudio de la historia de las matemáticas (HM) se viene realizando con métodos, técnicas y objetivos distintos; Gómez (2019) menciona que al estudiar la génesis histórica se evidencia que para un mismo concepto matemático se presenta una gran diversidad de puntos de vista; por ejemplo, mientras Penagos (2013) toma algunos documentos de Gottfried Wilhelm Leibniz (G. W. L) con el fin de estudiar algunos aportes que hace al cálculo diferencial mientras que Gordillo & Pino (2016) reconstruyen el concepto de antiderivada, en los dos casos se hace relevancia de los objetos y avances realizados por el autor, pero los reconocimientos que se hacen de los documentos originales tienen propósitos diferentes.

Con lo anterior claro, se puede establecer que al trabajar en HM no se hace un abordaje epistémico igual en todas las ocasiones considerando que hay focos no relacionados, es por ello que el presente artículo tiene como objetivo trabajar las perspectivas infinitesimales de G.W.L en algunos escritos de manera cronológica bajo la idea de diagrama propuesta por Giardino (2013), es decir, se hará un análisis de la(s) representación(es) icónicas que usa el autor con el fin de determinar si estas son capaces de comunicar, generar inferencia y mostrar la idea completa de infinitesimal planteada, así mismo, se hace una contribución a elementos de tipo educativo, sobre la importancia de estudiar la historia de las matemática desde la perspectiva diagramática y las ventajas que tiene esta herramienta cognitiva. Por otro lado, se realizará una dualidad entre texto y diagrama para identificar las potencialidades al trabajar las dos, pero a su vez poner en evidencia las perspectivas del objeto seleccionado.

De igual manera, como se indicó previamente, el análisis didáctico, desde la HM depende del objetivo los abordajes que se hacen y la perspectiva de la historia de las matemáticas que se tiene en cuenta, que para este caso se centrará en como el discurso del autor y sus diagramas permiten potenciar la educación matemática y la formación de profesores específicamente, partiendo de las potencialidades que ponen en evidencia Bello & Forero (2016) quienes citan a Guacaneme (2010), puesto que refieren principalmente a como la visión del conocimiento matemático se transforma y aporta de manera distinta.

Por último, dentro de este desarrollo se encontrarán algunas conclusiones sobre los elementos antes expuestos y sobre la pertinencia de las representaciones de Leibniz al momento de consolidar sus diagramas.

Fundamentos teóricos:

Bello (2021) indica que el conocer la historia de las matemáticas tiene influencia en el conocimiento del docente de matemáticas, haciendo que su práctica profesional se amplíe y se nutra. Está articulación permite que se comprenda no solo el producto final resultante de una teoría, sino el recorrido para que ello surgiera y se construyera de manera completa, logrando que el docente incorpore una base de preguntas, situaciones, problemas, instrumentos, métodos, entre otros y que podrá plantear a sus estudiantes. Guacaneme (2010) menciona que la HM en la formación docente cualifica mejor los conocimientos y actitudes de la enseñanza de las matemáticas y por consiguiente nutre el contenido pedagógico del profesor.

Kilpatrick (1998) en su conferencia “La investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad.” establece que la educación matemática surge, pero se comienza a transformar inmediatamente, inicia a recopilar intereses de la propia comunidad, pero a la vez toma algunos elementos como foco de análisis. Uno de ellos, el interés por entender el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, este se encuentra como punto de intersección de varias disciplinas, como “la psicología, la sociología, la lingüística, las matemáticas, la epistemología y la ciencia cognitiva" (Kilpatrick, 1998, p.15), concretamente, en el desarrollo de este artículo se hará énfasis en las tres últimas disciplinas mencionadas.

Lo anterior, considerando que se tiene el interés de hacer un análisis donde se muestren las perspectivas infinitesimales desde los documentos originales de Gottfried Wilhelm Leibniz, colocando en consideración el estudio de la historia matemática de ese momento (la cual comprende: problemas del momento, precursores, indicios de generación de elementos, lenguaje, etc) por tal razón es importante realizar un análisis de los infinitesimales para justificar y comprender de manera completa estos elementos sin afectar las interpretaciones realizadas a partir de los documentos abordados.

A lo largo de la historia, muchos autores influyeron en la consolidación y construcción de matemáticas para resolver situaciones de la época Arreaza (2015). Uno de los autores fue Leibniz, un filósofo, matemático, abogado que consolidó su cálculo infinitesimal con cantidades casi nulas (Robertson, 1998), sin embargo su trabajo sobre los indivisibles fue desvalorizado por la comunidad matemática por su poca rigurosidad y la no existencia en el terreno de las matemáticas (González, 2004), no obstante, su teoría permite evidenciar algunos aspectos sobre la caracterización de su trabajo y su intención de formalizar las cantidades infinitamente pequeñas (Knobloch, 2002), es así que se pretende revisar y analizar las perspectivas propuestas por Leibniz con el objetivo de establecer aspectos de su práctica matemática, haciendo uso de actividades matemáticas y de los diagramas, llegando de esa manera a relacionarlo con las disciplinas que fueron resaltadas anteriormente y que se mencionaron por Kilpatrick (1998).

En tal sentido, Salamanca (2019) quien cita a Kitcher define una práctica matemática como una quíntupla L, M, Q, R, S (Refiere a un lenguaje (L), un conjunto de ideas metamatemáticas (S), un conjunto de preguntas aceptadas (Q), un conjunto de razonamientos aceptados (R) y unas declaraciones aceptadas (M)), con el propósito de entender los conocimientos matemáticos implicados en el desarrollo de situaciones o problemas de una época específica, lo cual va de la mano con lo establecido por Ferreiros (2016), quien entiende la práctica como aquel elemento cognitivo que usan los matemáticos para poder resolver problemas, teoremas, etc. Estos conocimientos son vistos desde una perspectiva epistemológica porque se tiene como objetivo la interpretación y el análisis de los mismos, sin embargo, el movimiento social también está involucrado en las aceptaciones de la práctica y en sus posteriores cambios como fue indicado por Bello (2021) quien cita a Ferreiros. Ahora bien, la práctica matemática consolidada por Leibniz aborda conceptos importantes en los tipos de problemas del cálculo (variación, acumulación y movimiento) definidos por Moreno (2014), específicamente en la perspectiva del análisis infinitesimal. Por otro lado, Bello & Forero (2016) que citan a Giaquinto indican que una colección de actividades matemáticas compone una práctica matemática, además, las actividades son un medio para comunicar a la sociedad las soluciones de los problemas, comprender las nociones o conceptos matemáticos, y los razonamientos encontrados desde el punto de vista epistemológico en el abordaje de situaciones. Si bien, la práctica matemática es difícil abordarla completamente en un texto corto, las actividades dan pie para comprender elementos necesarios de la misma y profundizar en los razonamientos del autor.

Este tratamiento sobre los infinitesimales permite revisar algunos elementos asociados a la práctica matemática realizada por el autor, por lo que se ven inmersas actividades matemáticas (A.M) a lo largo de la misma, teniendo en cuenta lo indicado por Bello y Forero (2016) quienes citan a Giaquinto (2005) establece que hay diferentes A.M, las cuales son:

- **Descubrimiento:** Revelar propiedades en la resolución de una situación.

- **Explicación subjetiva y objetiva:** Argumentar el razonamiento en la solución del problema.

- **Formulación:** Enunciar algoritmos que permitan el desarrollo de diferentes situaciones parecidas.

- **Aplicación:** Capacidad de poner en uso las conclusiones de la práctica en situaciones similares.

- **Justificación**

- **Representación:** Sistema de símbolos y representaciones propios de la práctica matemática.

La herramienta que se abordará para el análisis de los razonamientos del autor será el diagrama y el discurso del mismo. Giardino (2013) establece que los diagramas son herramientas cognitivas de representación que permiten la investigación, manipulación e interpretación de los elementos que se encuentran inmersos, no obstante van asociados no solo a un tipo de representación sino a una asociación entre varias, es decir, involucra la representación icónica pero a la vez un discurso que se muestra generalmente de forma simbólica o descrito de manera natural, colocando en evidencia que es una articulación entre imagen y palabra; un ejemplo de ello, es lo que hacen Gillibert & Wehrung (2011) en el capítulo II de su libro From objects to diagrams for ranges of functors, puesto que relacionan las ideas de álgebra booleana usando distintas representaciones y la potencialidad de las mismas.

Frente a la conjugación antes establecida, Krämer (s.f) indica que se genera lo denominado "operative iconicity", mostrando un objeto matemático que trae consigo un tipo de aprendizaje nuevo sobre él; dicho de otra manera, permite la exploración y generación de objetos implícitos.

Por otro lado, se establece que la ciencia cognitiva se ve relacionada con los diagramas porque permite estudiar y responder a la pregunta ¿Cuál es la forma de actuar del autor? y la definición que plantea Medina (2008) indica "un empeño contemporáneo de base empírica para responder a interrogantes epistemológicos de antigua data, en particular los vinculados a la naturaleza del conocimiento, sus elementos componentes, sus fuentes, evolución y difusión" (Gardner, 1985, 1987; p. 21), mostrando así que la epistemología se encuentra vinculada directamente con la ciencia cognitiva, por lo que se puede articular un trabajo de análisis frente a lo construido directamente por Leibniz, partiendo de las dos vertientes vinculadas (epistemología y matemáticas) y la educación matemática.

Teniendo clara la definición de diagrama y sus capacidades en la educación matemática, se hará un análisis de algunos diagramas realizados por Gottfried Wilhelm Leibniz de manera cronológica, con el fin de establecer el abordaje, evolución y representación que hizo sobre los infinitesimales, así mismo, se pretende revisar si los elementos vinculados a los diagramas que permiten determinar perspectivas de infinitesimales en la época.

Resultados y Análisis

Con el objetivo de poner en evidencia la idea y aplicación que construye Leibniz de "cantidad infinitamente pequeña o infinitesimal", se realizó una sistematización de documentos escritos por el autor. Posteriormente, se abordaron algunos documentos considerados relevantes de manera cronológica, que son importantes para identificar las perspectivas infinitesimales de este artículo, con el propósito de observar si hay un cambio de tratamiento, abordaje y/o definición con el paso de los años, así como, comprender elementos de la práctica matemática vinculada a los discursos. Los textos referenciados durante el desarrollo son:

- *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae* es una obra original de G.W.L que data aproximadamente del año 1682 pero que fue traducida por Knobloch en 2016. En específico, se analizarán las proposiciones VI y VII.

- *Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas.* de 1684 escrito por G. W. L.

- *Sobre una geometría altamente oculta y el análisis* de los indivisibles y los infinitos de G.W.L, que fue publicado en 1686.

- *Gottfried Wilhelm Leibniz - Die mathematischen* es recopilación de obras de G.W.L que la muestra de manera cronológica, la cual fue publicada por la editorial Georg Olms Verlag. Sin embargo, se hizo énfasis en el capítulo treinta que es titulado como: "Supplementum geometriae dimensoriae".

Con los documentos antes mencionados se hicieron dos ejercicios, el primero de ellos consistía en observar el diagrama sin tener presente el texto asociado, con el fin de inferir propiedades y elementos presentes en el mismo, como lo indica Giardino (2013), así como poner en evidencia la autonomía del diagrama en el trabajo del autor. En adelante está acción será reconocida como Relaciones propias del diagrama.

Por otro lado, se hizo un segundo ejercicio que consistía en hacer una conjunción entre texto y diagrama (asociando la definición de Giardino (2013)), considerando que el objetivo del artículo es mostrar las perspectivas infinitesimales constituidas por Leibniz y no la reinterpretación de las mismas. En otras palabras, si solo se cuenta con la acción propia de observar y analizar la representación icónica, el observador solo podrá establecer algunos elementos, pero quizás no pueda referir la forma de actuar real del autor, no obstante, si se cuenta con la unión de representaciones llegará a dar indicios claros de la articulación del conocimiento que realiza el mismo.

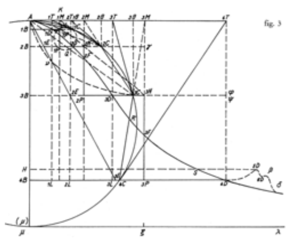
Dentro de este orden de ideas, se establecieron las concepciones y aplicaciones de los infinitesimales de Leibniz, encontrados en los diagramas a partir de los ejercicios antes ya mencionados, aunque se debe aclarar que no se hará de manera individual sino se irá presentando de forma conjunta con lo obtenido en el discurso construido, puesto que ambos ejercicios tienen particularidades propias que dan indicios de elementos distintos. Lo anterior se hace considerando que para analizar los diagramas del autor es necesario el discurso, desde el punto de vista de los escritores, es decir, se considera que al tener la conjunción mencionada en el segundo ejercicio se logra comprender la forma de actuar y reconocer sus razonamientos.

Por último, se analizan los cambios de perspectiva en los infinitesimales y como aportó el diagrama al momento de comprender los elementos inmersos. De esta forma se abordaron a dos preguntas principalmente: ¿Qué se concluye de los diagramas realizados por Leibniz? y ¿Qué se concluye de la idea de infinitesimales construida por Leibniz?

El abordaje de los infinitesimales Proposición VI

Según Knobloch (2002), en De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae, "Leibniz sentó las bases rigurosas sobre su teoría de las cantidades infinitamente pequeñas". En las proposiciones dos, tres, cuatro y cinco de su libro, enuncia que cualquier serie de cantidades en orden o perturbadas siempre cumplirán una relación con sus diferencias; De hecho, las diferencias pueden continuar hasta el punto que sea menor a una cantidad dada, lo cual parte de las ideas antes constituidas por matemáticos como Eudoxo, Arquímedes, Euclides, etc. Las actividades matemáticas que están inmersas en las proposiciones son las de descubrimiento, explicación objetiva, justificación y representación, evidenciadas en la investigación y que son necesarias para determinar los resultados de las cantidades sin importar su tamaño. El trabajo fuerte sobre una perspectiva de los infinitesimales se encuentra en la proposición VI, pero es necesario comprender las proposiciones anteriores para consolidar correctamente los elementos abordados.

Tabla I. Instrumento

DIAGRAMA	ACTIVIDAD MATEMÁTICA	PERSPECTIVA DE INFINITO
 **Figura I** *Diagrama proposición VI.* Fuente: Knobloch (2016) "De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae"	**Relaciones propias** Descubrimiento Explicación subjetiva	
	Unión de representaciones Justificación Representación Explicación objetiva Descubrimiento	Idea potencial con los rectángulos especiales.

Se aborda la propia imagen sin discurso y se intenta generar una hipótesis sobre las posibles actividades matemáticas, no obstante la comparación con el discurso construido por Leibniz presenta una brecha entre los razonamientos propios y los del autor (tabla 1), por esta razón la imagen de la proposición VI debe estar acompañada con el discurso, esto no quiere decir que los dos aspectos antes mencionados necesariamente deban estar acompañados pues cada uno trae beneficios dependiendo de lo que se pretende. Ahora bien, unos primeros indicios de la actividad de "Justificación" se desarrollan en ocho etapas, de las cuales la primera, séptima y octava consolidan aspectos claves. En la primera etapa Leibniz divide el intervalo en dos subintervalos desiguales, posteriormente explica la relación de las áreas de los rectángulos complementarios y elementales que son establecidos por las rectas tangentes a la circunferencia y los subintervalos antes mencionados; así mismo en la etapa siete considera que las alturas de los rectángulos especiales siempre serán menores a una cantidad ya establecida sin importar que esta cantidad sea pequeña "tametsi caeteris majus, aut certe non minus sit assumtum intervallis, tamen assignata quantitate minus assumi potest; nam ipso sumto utcunque parvo caetera sumi possunt adhuc minora." Knobloch (2016) DQA (pág., 26) revelando una perspectiva de infinito potencial, de igual manera en la etapa ocho declara que todos los rectángulos elementales finitos se aproximan al área bajo la curva de la circunferencia y por tanto los rectángulos complementarios serán mayores a la misma, que corresponde a la actividad de "Descubrimiento". Con lo anterior, es evidente que la proposición VI aborda una perspectiva infinitesimal acerca de las alturas de los rectángulos especiales, porque cada vez serán menores que cualquier altura dada y por lo tanto la suma de las áreas de los mismos (rectángulos especiales) se aproximan al área por calcular. Es aquí que las anteriores proposiciones son fundamentales en sus razonamientos para la construcción del diagrama (imagen y discurso). Por otra parte, la actividad de Representación estuvo presente a lo largo del abordaje de la proposición. Para finalizar Leibniz menciona elementos de continuidad con respecto a la curva y las alturas de los rectángulos especiales; Knobloch (2002) explica que Leibniz evitó el "peligro" con el axioma de Arquímedes sobre su método de infinitesimales porque al omitirlo se da la posibilidad de que las curvas presenten huecos y por lo tanto algunas alturas no existan, concordando esto con las conclusiones sobre Spatium autem gradiforme eousque produci potest, ut differentia ejus a mixtilineo fiat minor quavis data, ut ostendi Knobloch (2016) DQA (pág., 29), la diferencia continua entre las superficies cada vez es más pequeña que cualquier otra. Según Knobloch (2002) Leibniz ya tenía presente la ley de continuidad porque él declaró la deuda de los antiguos con respecto al rigor geométrico.

- Sumas de diferencias

El segundo escrito de G. W. L que se investigó fue "Juristisch - mathematische Überlegungen zum einfachen zwischenzeitlichen Zins " escrito en 1683. En este documento se expone el pago de un "préstamo" que tiene cuotas e intereses. El principal motivo por el que se profundiza en este texto se debe a que amplía la idea de infinitesimales, haciendo uso de lo que él denomina "Lemma aus der Infinitesimalrechnung".

Ahora bien, con el fin realizar el abordaje de lo analizado, lo primero que se hará es anunciar el diagrama que acompaña el "LEMMA", posteriormente se mostrarán los elementos propios de la representación y los que surgen al momento de articular el discurso y la imagen. Por último, se hará énfasis en las ideas infinitesimales y las actividades matemáticas propuestas con el fin de reflexionar frente a la evolución de la concepción con respecto a la noción consolidada en 1682.

Tabla II. Instrumento en el Diagrama I

Diagrama	Actividad matemática	Perspectiva de infinito
$+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}-\frac{1}{3200000}$ etc. multipliziert mit 20 ergibt $\odot$ $\quad 20-1+\frac{1}{20}-\frac{1}{400}+\frac{1}{8000}-\frac{1}{160000}$ etc. $+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc. multipliziert mit 1 ergibt $\oslash$ $\quad +1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc. Also ist $\odot+\oslash$ $\quad 20$ * * * * * **Figura 2** *Diagrama series aritméticas* *Fuente:* Knobloch (2016) "De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae"	**Relaciones propias del diagrama** * Formulación * Representación	Establece que el proceso se puede continuar al nombrar el "etc."
	Unión de representaciones * Explicación subjetiva * Formulación	

Al observar el diagrama, se debe establecer que, si bien el texto muestra el pago de un préstamo usando cuotas e intereses, se ponen en evidencia algunas ideas de tratamiento y nociones de infinitesimales desde las relaciones propias del diagrama y unión de representaciones.

Al realizar el primer ejercicio sobre el diagrama se evidenció que había un tratamiento de suma de diferencias de cantidades que son cada vez más pequeñas; Así mismo, se denota que es un proceso que se puede seguir realizando, puesto que usa el término "etc", mostrando de esta manera la generación y uso de cantidades cada vez más pequeñas, es decir, infinitesimales. De igual manera, hay algunas actividades matemáticas (Giaquinto, (2005)) inmersas en el diagrama; una de ellas es la conocida como "*Formulación*", puesto que desde las enunciaciones dispuestas en el diagrama (textualmente son "multipliziert mit" y "ergibt") está generando la disposición de un algoritmo, sin embargo, no es la única actividad presente en el diagrama, sino que la "*Representación*" también se ve involucrada, la cual tiene como énfasis la instauración de simbolismos e iconos propios, para el caso en particular, llama la atención dos elementos $(\odot,\ \varnothing)$ que, desde la visión del ejercicio puesto en juego, significa que se están denominando los resultados de la suma de diferencias desde los símbolos.

No obstante, como se dejó claro en el párrafo anterior, si bien se establecen estas conjeturas a partir de los conocimientos que se tienen, es necesario corroborarlas con el texto e indicar qué objetivo se logra al manejar estos elementos y como aporta a lo que él denomina "Lemma del cálculo diferencial". Es por ello que, al concluir la revisión mediante el primer ejercicio, se inició con la revisión mediante la articulación de texto - diagrama.

Igualmente, al ejecutar el segundo ejercicio, se pudo evidenciar que el autor lo que hace es tomar lo concluido en la sección anterior; En este caso, en el enunciado IV (inmediatamente anterior al "Lemma") el cual muestra "la suma de toda la serie infinita" que permitirá pagar los intereses y cuotas de préstamo aceptado con ciertos valores específicos. Posteriormente, el autor indica que el " $\frac{v}{v+1}$ es igual a la suma de toda la serie infinita $\frac{1}{1}-\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}-\frac{1}{v^3}+\frac{1}{v^4}-\frac{1}{v^5}$ etc", mostrando con ello que él ya generalizaba algunas sumas de diferencias, puesto que en proposiciones anteriores se denota el tratamiento con casos particulares; Es decir, Leibniz ya tenía una apropiación de operatividad de cantidades infinitamente pequeñas, así mismo, se puede establecer que él en ese momento, no tenía en cuenta algunas cantidades, puesto que, al resolver ya lo daba como un proceso terminado, es decir, usaba una concepción de infinito actual, lo cual se supone que queda demostrado al tomar v = 20.

De igual manera, al hacer este tipo de análisis se estableció que hay algunas actividades matemáticas inmersas en el proceso; La primera que se muestra de manera clara es formulación, puesto que Leibniz comienza por evidenciar el tratamiento de las cantidades haciendo uso de algoritmos establecidos por él, uno de ellos es el enunciado en el diagrama donde indica la razón por la que la suma "infinita" cuando v= 20 es igual 20/21. Por otro lado, se denota que la actividad de justificación también se encuentra presente al momento de observar este discurso, debido a que el autor insiste en argumentar de manera completa su forma de actuar, es decir, va argumentado cada elemento que pone en juego. Si bien lo hace desde el ejemplo particular se puede indicar que lo intenta hacer general, ya que la simbolización que usa es regular para todos los casos parecidos. Por último, se denota indicios de representación, puesto que genera un simbolismo para todas las series que tengan cierta estructura dada, como lo es: " $\frac{1}{1}-\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}-\frac{1}{v^3}+\frac{1}{v^4}-\frac{1}{v^5}$ etc.", lo cual nos lleva a establecer que él va articulando diferentes elementos en la medida en que avanza su discurso, es decir, va configurando una práctica matemática que contiene diferentes actividades matemáticas. Ahora bien, algo que se debe tener en cuenta es que al relacionar el texto con el diagrama se estableció que efectivamente el autor hace mención y uso de cantidades menores que cualquiera dada, así mismo, es capaz de operarlas sin complicaciones, es decir, al destinar una cantidad final como la suma de una serie infinita da muestra que Leibniz dada procesos como finalizados, pero a la vez que el ya hacia procesos de operación y aproximación.

Hacia una simbolización propia para los infinitesimales.

El artículo que se tomó de referencia y que marca un inicio es "Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas" de 1684 G. W. En primer lugar, al realizar el ejercicio que involucra el revisar el diagrama y el discurso, se evidencio la importancia de estos dos elementos para comprender los razonamientos del autor. Leibniz (1684) menciona que "las diferencias de las ordenadas de las rectas (XZ, XV, XY, etc) es al dx, como lo son a las rectas tangentes (dv, dz, dw, etc) "(p. 467); Aceptando esto, presenta las reglas generales sobre el cálculo y aclara los diferentes símbolos que introduce en cada una de sus reglas, mostrando con ello la actividad de *descubrimiento* y *simbolización*, así mismo explica que la razón de las ordenadas y abscisas de -dy o -dz significa que decrecen y si es el caso contrario las razones son crecientes dy o dz, (donde se muestra en la figura 3); No obstante, hace este proceso mediante una situación específica de las diferencias de las ordenadas. Leibniz (1684) afirma "en el punto M las ordenadas están estáticas y no importa que sean crecientes o decreciente las diferencias de las ordenadas, sucederá -0 = +0 y por lo tanto dv = 0" (p. 468) - actividad de *descubrimiento* -. La perspectiva infinitesimal es explícita con las diferencias de las ordenadas XY, XZ, XV, etc., ya que está diferencia con respecto a dx garantiza el crecimiento o decrecimiento de las rectas tangentes, por otro lado, al dirigirse al punto máximo o mínimo de la curva Leibniz (1684) indica "su diferencia por más pequeña que sea siempre será cero porque las ordenadas son estáticas" (468) - *actividad de descubrimiento*- y en consecuencia al razonamiento anterior el valor máximo o mínimo de la curva garantiza la convexidad o concavidad.

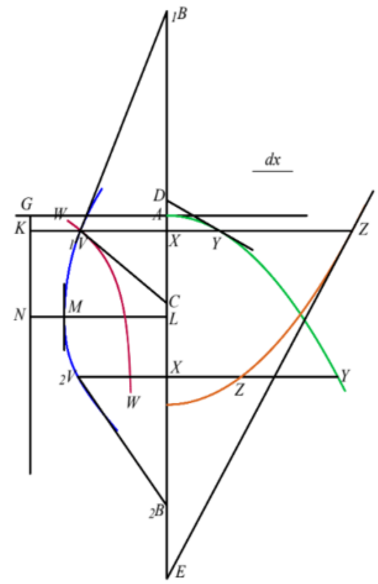


Figura 3. Diagrama de método de máximos y mínimos.

Fuente: Editorial Georg Olms Verlag (2010) Gottfried Wilhelm Leibniz - Die mathematischen

- **Un método para abordar los infinitesimales**

Por otro lado, W.G.L en el año 1686 pública en la revista "Acta Eruditorum" su artículo titulado *Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de indivisibles e infinitos* donde comienza por explicar algunos métodos antes abordados por él pero que habían sido cuestionados por otros matemáticos de la época, por lo que en este caso, solo se hará énfasis en los elementos nuevos que proporciona este apartado y que apoyan el énfasis propuesto que son los infinitesimales; es así que se procederá bajo el siguiente diagrama:

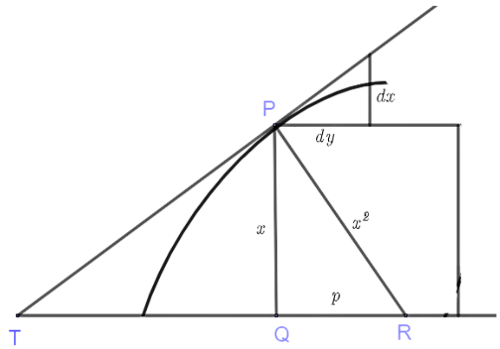


Figura 4. Diagrama sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles y los infinitos

Nota: Leibniz (1686) "Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles y los infinitos"

En el diagrama que se presenta se pone en evidencia lo que Leibniz denominó *triángulo característico* y esté se define como un triángulo rectángulo cuyos catetos son cantidades infinitamente pequeñas denominadas "*dx*" y "*dy*", considerándose así como una actividad matemática de *aplicación*, puesto que el autor en este caso refiere que los elementos que componen el triángulo son infinitesimales y pone una situación particular donde quiere determinar áreas, como se describe en palabras de Leibniz (1686) en el siguiente fragmento "imaginé rápidamente el triángulo que en todas las curvas yo llamaba característico, cuyos lados son indivisibles (o, hablando más precisamente, infinitamente pequeños) o cantidades diferenciales."

Teniendo en cuenta lo anterior, se comprende que al observar de manera cronológica se brindan indicios de la transformación del concepto. Por otro lado, el tratamiento que hace en este caso el autor es usar los infinitesimales para estimar el área bajo la curva por medio de relaciones entre los lados de los triángulos, es por ello que comienza a cambiar los lados del triángulo y generar nuevos elementos como tangencia.

- **Método de la tangente inversa (Usando la perspectiva infinitesimal consolidada)**

Con base en el libro de Olms (s.f) titulado "Gottfried Wilhelm Leibniz - Die mathematischen, se hará énfasis en el capítulo 30 que es titulado "Supplementum geometriae dimensoriae", el objetivo de este apartado es hallar una curva que cumpla una cierta relación entre los lados del triángulo característico y la inclinación de la recta tangente - actividad de descubrimiento (Figura 5). Leibniz define los elementos necesarios para construir los posteriores razonamientos (ejes del plano, curva, paralelismo, etc.), considera una cantidad constante "a" y dos triángulos semejantes uno determinable y otro indeterminable (usados para la solución pero no era importante el conocer sus longitudes al momento de poner en juego el método) construidos por la recta tangente TC dada a la curva C(C), además determina otra cantidad E(C) (dx) que es la diferencia de las ordenadas (F) E y (F)(C). Con lo anterior especifica las diferentes razones de los triángulos antes mencionados, la constante a y la diferencia de las ordenadas. Esto permitió concluir que la recta tangente TC es cuadratriz de la recta H(H) porque las ordenadas de la recta C(C) multiplicadas por la constante a es igual a la suma de las ordenadas H(H) respecto a las abscisas AF. Es así como los infinitesimales son cantidades infinitamente pequeñas que surgen con la diferencia de las ordenadas de cualquier curva; Así mismo, se puede concluir que estas son manipulables e importantes para la resolución de ecuaciones diferenciales, permitiendo aceptar los razonamientos de Leibniz sobre el método de la tangente inversa y la comprensión paulatina de la actividad de justificación. Lo anterior principalmente se debe al método geométrico que comienza a instaurar Leibniz y que es referenciado por Ruiz (2019), puesto que en este indica que no se debe manejar la misma forma de construcción, al estilo euclidiano, sino que se puede generar desde instrumentos distintos para lograr el tipo de generalización que se pretende.

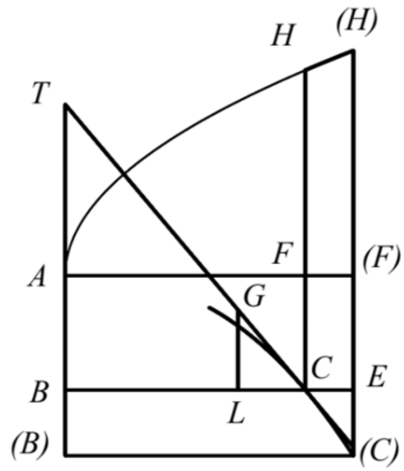


Figura 5. Diagrama del método inverso

Fuente: Diagrama construido por Verlag (2010) "Gottfried Wilhelm Leibniz - Die mathematischen"

Conclusión

Dentro de este apartado se podrán encontrar algunas ideas finales que se lograron consolidar durante el proceso investigativo, por lo que se retoman elementos asociados con la práctica matemática de G.W.L y las perspectivas infinitesimales que se presentaron, con el fin de observar si hay una evolución del objeto matemático o un estancamiento en el proceso. Paralelamente, se irá considerando la funcionalidad del diagrama al momento de comprender el proceso de construcción que hace el autor.

En los razonamientos que hace Leibniz en los discursos analizados frente a los infinitesimales se pueden deducir que hay un avance en las ideas, representaciones y argumentaciones que se enuncian al revisar los escritos de manera cronológica. En primer lugar, se nota que en el texto sobre las cuadraturas el autor refiere y usa algunos apartados, sin ser completamente específico en su definición sino que usa expresiones como: "Difieren en menor cantidad para cualquier dato dado", "Será menor que cualquier error justificable" y "Pero la zona en forma de escalera se puede continuar hasta el punto de que la diferencia y la de la línea mixta se hace más pequeña que cualquier otra, como he demostrado" (Knobloch, 2002, así mismo, los usa y opera dichas cantidades dentro de la demostración, por lo que se puede considerar como un abordaje inicial.

En el siguiente discurso, se pudo observar que G. W. L desde una situación específica, (sobre la economía) establece un "LEMMA" para abordar elementos asociados con los infinitesimales usando la suma de diferencias de series aritméticas, es por ello que se denota un avance hacia una concepción articulada, así mismo, se puede establecer con este texto que ya se da una estructura general a las cantidades que se vuelven cada vez más pequeñas y que incluyen como denominador una potencia. Por otro lado, se denota que en el texto de máximos y mínimos se establece una nomenclatura propia para las cantidades infinitamente pequeñas, por lo que avanza en su concepción sobre esta idea y las actividades matemáticas puestas en juego. Posteriormente, en el texto de "sobre una geometría altamente oculta y el análisis de indivisibles e infinitos" se pone en evidencia una definición que genera Leibniz, la cual va más allá de lo reconocido anteriormente; En esta articula de manera explícita la representación de los infinitesimales en las que se basa en significados propios, esto refleja un avance significativo sobre los mismos.

Mientras que en el documento donde enuncia el método inverso muestra una aplicación clara e importante de los infinitesimales, puesto que los pone en juego a la hora de mostrar las áreas de los rectángulos que genera para poder determinar el área bajo la curva. Es en este lugar, donde ya hace uso de nomenclatura, definición, argumentación y justificación, por lo que ya muestra una teoría compleja de los infinitesimales.

En síntesis, por medio del estudio de los diagramas, se pudo observar el uso de los infinitesimales, pero a la vez la evolución de su concepción con el pasar del tiempo, así mismo, la representación, el uso, la operacionalidad, la justificación, etc. Se evidenció un avance notable. Evidentemente se notó que inició por una noción "intuitiva" que fue "formalizando" de manera notable.

Por otro lado, como se enunció anteriormente hay una evolución en la concepción la cual se muestra en la práctica matemática, es así que se pudo evidenciar que las representaciones de los infinitesimales con el pasar del tiempo se hacían de manera distinta, pero con un significado mayor, es decir, en elementos simbólicos e icónicos ya se notaba una concepción distinta. De igual manera, se observó que la justificación tuvo grandes cambios, puesto que en un primer momento no se estableció una definición amplia, sino que se tenía en cuenta lo realizado por sus antecesores, posteriormente Leibniz comienza a modificar su discurso con el fin de que este muestre inmediatamente elementos propios del objeto. Llegando a que cada una de las actividades matemáticas que realizó G. W. L tuvo una evolución con el pasar del tiempo y su conocimiento.

Por último, se debe resaltar que el papel que realizaron los diagramas fue muy importante, puesto que, permitió mostrar la forma de pensar del autor de manera rigurosa, llegando a que no es una representación simplemente, sino que avanza de esta idea porque muestra orden, concepción, articulación, etc. Sin embargo, a la vez da cabida a la comprensión de elementos asociados a la educación matemática, es decir, muestra y brinda herramientas para poder analizar elementos como la epistemología.

Agradecimientos

En este apartado principalmente se desea agradecer al grupo de investigación "MATTOPO" de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por su dedicación y tiempo brindado a la investigación. Por otro lado, a los docentes que hicieron parte de nuestra formación, en especial, al docente Alberto Forero Poveda quien nos guio, aconsejó y acompañó durante todo el proceso realizado.

Referencias

Arreaza, T. & Valencia, I. (2015). *La resolución de problemas matemáticos: Una estrategia en el aula de clase.* Acta latinoamericana de matemática educativa. http://funes.uniandes.edu.co/10822/1/Arreaza2015La.pdf

Bello Chávez, J. (2021). *Diagrama y práctica matemática en la geometría cartesiana (1637-1750): Contribución de la historia de la matemática a la formación de profesores*. Repositorio de la Universidad del Valle. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/21329

Medina, N. (2008). La ciencia cognitiva y el estudio de la mente. *IIPSI, 11*(1). https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2747355.pdf

Bello, J. & Forero, A. (c. 2016). El conocimiento didáctico del profesor de matemáticas. *En Una experiencia con la Geometría de Descartes*. Editorial UD. https://editorial.udistrital.edu.co/contenido.php?id=846&f=6

Penagos, C. (2013). *Aportes realizados por Leibniz a la consolidación del cálculo diferencial* [Tesis de pregrado]. Universidad Pedagógica Nacional.

Gómez, B. (2019, mayo). Los libros de texto de matemáticas y el análisis histórico y epistemológico. *Números - Revista de Didáctica de las Matemáticas*. https://core.ac.uk/download/pdf/286786938.pdf

González, O. (2014). El cálculo infinitesimal Leibniciano: una síntesis de las perspectivas de Brunschvicg e Ishiguro. *Signos Filosóficos*, VI (11), 97-120. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=34301105

Gordillo, W. & Pino R. (2016, agosto). Una Propuesta de Reconstrucción del Significado Holístico de la Antiderivada. *Bolema: Boletim* *de Educação Matemática,* 30(55), 535-558. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a12

Guacaneme, Edgar Alberto (2010). ¿Qué tipo de historia de las matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista Virtual EDUCyT* , 2, pp. 1-13.

Gillibert, P., & Wehrung, F. (2011). From objects to diagrams for ranges of functors. Springer Berlin Heidelberg.

Ferreiros (2016). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices.* ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/340341237_Mathematical_Knowledge_and_the_Interplay_of_Practices

Kilpatrick, J., Gómez, P. & Rico, L. (1998). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (2.ª ed.) [PDF]. http://funes.uniandes.edu.co/679/

Knobloch, E. (2002). *Leibniz's rigorous foundation of infinitesimal geometry by means of Riemannian sums.* Phil Papers. https://philpapers.org/rec/KNOLRF

Knobloch, E., Stock, A., Jost, J., Wagner, H.G., Wolf, M. (2016). De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis. In: Knobloch, E. (eds) Gottfried Wilhelm Leibniz. Klassische Texte der Wissenschaft. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52803-7_1

Leibniz (1684) *Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas.* Acta Eruditorum

Leibniz (1686) *Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles y los infinitos.* Acta Eruditorum

Medina C., N. (2008). La ciencia cognitiva y el estudio de la mente. *Revista de investigación en psicología, 11*(1), 183+. https://link.gale.com/apps/doc/A298615502/E?u=anon~b660c2dd&sid=googleScholar&xid=2fb0ca21

Moreno Armella, L., (2014). Intuir y formalizar: procesos coextensivos. Educación Matemática, ( ), 185-206. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854010

Pietarinen, A., Chapman, P., Bosveld, L., Giardino, V., Corter, J. & Linker, S. (s. f.). *Diagrammatic representation and inference* (1.a ed.). Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-86062-2

Salamanca, D. (2019). *Una experiencia con las prácticas matemáticas asociadas en el hacer de las cuadraturas* [Tesis de pregrado]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.