Eco matemático ISSN: 1794-8231 (Impreso), E-ISSN: 2462-8794 (En línea) Volumen 14 (1) Enero-Junio de 2023, páginas 71-80

Eco Matemático
Scientific Journal of Matematics

Sobre el operador q-integral fraccional generalizado de tipo Kober que envuelve la análoga básica de la función hipergeométrica generalizada

On the generalized Kober type fractional q-integral operator involving the basic analogue of the generalized hypergeometric function

Jaime Antonio Castillo-Pérez[a*], Leda Galué-Leal[b]

[a]*Doctor en Ciencias Matemáticas, jcastillo@uniguajira.edu.co, https://orcid.org/0000-0002-7850-4159, Universidad de la Guajira, Riohacha, Colombia.
[b]Doctor en Ciencias Matemáticas, lgalue@hotmail.com, https://orcid.org/0000-0002-4476-7081, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Forma de citar: Castillo-Pérez, J. A., y Galué-Leal, L. (2023). Sobre el operador q-integral fraccional generalizado de tipo Kober que envuelve la análoga básica de la función hipergeométrica generalizada. *Eco Matemático*, 14 (1). 71-80 https://doi.org/10.22463/17948231.3766

Recepción: Agosto 15, 2022
Aprobación: Diciembre 22, 2022

Palabras clave

Análoga básica de la función hipergeométrica generalizada, Aplicaciones, Cálculo Q-fraccional, Operador Q-integral fraccional, Q-funciones elementales y especiales.

Resumen: En este artículo se pretende aplicar el operador q-integral fraccional generalizado de tipo kober establecido por Castillo y Galué, a la análoga básica de la función hipergeométrica generalizada. Usando la representación en serie del operador y de la análoga básica de la función hipergeométrica generalizada se obtiene un nuevo resultado, al cual, después de hacer cambios adecuados en sus parámetros, se verifica que contiene formas generalizadas de las integrales q-fraccionales de las funciones hipergeométricas básicas $e_q(x)$, $E_q(x)$,$J_\nu^{(1)}(x;q)$,$J_\nu^{(2)}(x;q)$, $L_n^\alpha(x;q)$, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;q)$,$W_n(x;b,q)$,$S_n(x;p,q)$ y varias q-funciones elementales. Tales resultados constituyen una nueva tabla de integrales, la cual generaliza a las establecidas por otros investigadores.

*Autor para correspondencia jcastillo@uniguajira.edu.co

https://doi.org/10.22463/17948231.3766

Keywords

Basic analogue of the generalized hypergeometric function, Applications, Elementary and Special Q-functions, Fractional Q-integral operator, Q-fractional calculus.

Abstract: This paper aims to apply the generalized fractional q-integral operator of the Kober type established by Castillo and Galué, to the basic analogue of the generalized hypergeometric function. Using the series representation of the operator and the basic analogue of the generalized hypergeometric function, a new result is obtained, which by making appropriate changes in its parameters, is verified to contain generalized forms of the q-fractional integrals of the basic hypergeometric functions $e_q(x)$, $E_q(x)$,$J_v^{(1)}(x;q)$,$J_v^{(2)}(x;q)$, $L_n^{\alpha}(x;q)$, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;q)$,$W_n(x;b,q)$,$S_n(x;p,q)$ and several elementary q-functions. Such results constitute a new table of integrals, which generalizes those established by other researchers.

Introducción

Muchos investigadores han considerado y desarrollado operadores en q-cálculo, los cuales han sido establecidos como los análogos básicos de los bien conocidos operadores de cálculo fraccional y han sido aplicados a las q-funciones para generar tablas de integrales. El operador q-integral fraccional de Riemann-Liouville fue aplicado a ciertas q-funciones hipergeométricas (Yadav & Purohit, 2004) y luego, (Kalla et al., 2005) lo aplicaron a la análoga básica de la función H de Fox, derivando como casos particulares del resultado principal, resultados que incluyen q-funciones elementales y especiales. El operador q-integral fraccional de Kober ha sido considerado y aplicado por varios investigadores: (Saxena et al., 2005) lo usaron para establecer una extensión de la análoga básica de la función H de Fox y derivar varios casos especiales, (Yadav & Purohit, 2006) lo aplicaron a ciertas funciones hipergeométricas básicas y (Yadav et al., 2007) consideraron el mencionado operador y lo aplicaron a la función hipergeométrica múltiple; del resultado principal derivaron varios casos especiales que involucran a análogas básicas de las funciones de Lauricella y Kampé de Fériet. Más tarde (Delgado & Galué, 2008) definieron el operador L y lo aplicaron a la análoga básica de la función H de Fox para establecer una tabla de integrales. Posteriormente (Galué, 2009) define el operador q-integral fraccional de Erdélyi-Kober generalizado y lo aplica a la análoga básica de la función H de Fox; de este resultado se deriva una tabla de integrales para varias q-funciones. Nuevamente (Yadav et al., 2010) consideraron y aplicaron el operador L a la análoga básica de la función hipergeométrica múltiple, dedujeron un importante resultado que posteriormente fue usado por (Galué, 2012) para obtener el operador q-integral fraccional L de la función hipergeométrica generalizada $r\varphi s(\cdot)$. Del resultado principal, derivó varios casos importantes que incluyen funciones especiales. Recientemente (Castillo & Galué, 2020) definieron el operador q-integral fraccional generalizado de tipo Kober que contiene la función hipergeométrica de Fox-Wright y luego (Castillo & Galué, 2022) lo aplicaron a la análoga básica de la función H de Fox, derivando como casos particulares del resultado principal, resultados que incluyen q-funciones elementales y especiales.

q-función hipergeométrica generalizada

La análoga básica de la función hipergeométrica generalizada rFs(·) fue definida por Heine mediante la siguiente expresión Gasper & Rahman (2004):

$$r\varphi s(a_1, a_2, \ldots, a_r; b_1, b_2, \ldots, b_s; q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_n (a_2;q)_n \cdots (a_r;q)_n}{(q;q)_n (b_1;q)_n (b_2;q)_n \cdots (b_s;q)_n} \left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r} z^n \quad (1)$$

con $\binom{n}{2} = n(n-1)/2.$, donde $q \neq 0$ cuando $r > s+1$.

La serie $r\varphi s(\cdot)$ es finita, si uno de sus parámetros en el numerador es de la forma q^{-m};

$m = 1,2,\ldots$; $q \neq 0$ dado que $(q^{-m}; q)_n = 0$ para n=m+1,m+2,...,.

En (1) se asume que los parámetros $b_1, b_2, \ldots, b_s$ son tales que los factores del denominador en los términos de la serie nunca son cero, y satisfacen los siguientes criterios de convergencia:

Si $0<|q|<1$, la serie $r\varphi s$ $(a_1,a_2,\ldots,a_r; b_1, b_2,\ldots,b_s;q,z)$ converge absolutamente para todo z si $r \leq s$ y para $|z| < 1$ si $r = s+1$. Esta serie también converge absolutamente si $|q|>1$ y $|z|<|b_1b_2 \ldots b_s|/|a_1a_2 \ldots a_r|$.

La serie $r\varphi s(a_1,a_2,\ldots,a_r;b_1,b_2,\ldots,b_s;q,z)$ diverge para $z\neq 0$ si $0<|q|<1, r>s+1$ y si $|q|>1$ y $|z|>|b_1b_2 \ldots b_s|/|a_1a_2 \ldots a_r|$, a menos que termine.

La importancia de esta función radica en el hecho de ser solución de la ecuación diferencial hipergeométrica generalizada propuesta por Gauss, además, existe una gran cantidad de aplicaciones encontradas el física, química y ciencias de la ingeniería. A continuación, se aprecian distintas funciones q-elementales y q-hipergeométricas contenidas en dicha función. Es suficiente con hacer cambios adecuados en los parámetros de esta para derivar los siguientes casos particulares que contienen funciones elementales y especiales:

i. Las dos funciones q-exponenciales, Gasper & Rahman (2004).

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty} = 1\varphi 0(0; -; q, x), |x| < 1. \quad (2)$$

$$E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}} x^n}{(q;q)_n} = (-x;q)_\infty = 0\varphi 0(-;-;q,-x), |x| < 1. \quad (3)$$

El resultado (2) se deduce haciendo $r=s+1, a_i = b_i, i=1,2,\ldots,s$ y $a_{s+1} = 0$. De igual manera se obtiene (3), tomando $r=s$, $a_i = b_i, i = 1,2,\cdots,s$.

Note que los resultados (2) y (3) representan respectivamente las análogas básicas de las funciones exponenciales $f(x) = e^x$ y $f(x) = e^{-x}$.

Mediante procedimientos similares al anterior, es posible obtener los siguientes resultados:

Análogas básicas de las funciones de Bessel, Gasper & Rahman (2004).

$$J_\nu^{(1)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu 2\varphi 1\left(0;0;q^{\nu+1};q,\frac{-x^2}{4}\right), 0<q<1 \quad (4)$$

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu 0\varphi 1\left(-;q^{\nu+1};q,\frac{-x^2q^{\nu+1}}{4}\right), 0<q<1 \quad (5)$$

iii. Análogos básicos de los polinomios de Laguerre, Gasper & Rahman (2004).

$$L_n^\alpha(x;q) = \frac{(q^{\alpha+1};q)_n}{(q;q)_n} 1\varphi 1(q^{-n};q^{\alpha+1};q,-xq^{n+\alpha+1}). \quad (6)$$

iv. Análogos básicos de los polinomios menores de Jacobi, (Srivastava & Agarwal, 1989)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x;q) = \frac{(q^{\alpha+1};q)_n}{(q;q)_n}\ 2\varphi 1\big(q^{-n},q^{\alpha+\beta+n+1};q^{\alpha+1};q,xq\big). \quad (7)$$

v. Los polinomios de Wall, Gasper & Rahman (2004).

$$W_n(x;b,q) = (-1)^n(b;q)_n q^{\frac{n(n+1)}{2}}\ 2\varphi 1(q^{-n},0;\mathrm{b};q,x). \quad (8)$$

vi. Los polinomios generalizados de Stieltjes-Wigert, Gasper & Rahman (2004).

$$S_n(x;p;q) = (-1)^n(p;q)_n q^{-n(2n+1)/2} 1\varphi 1\big(q^{-n};\mathrm{p};q,-q^{n+3/2}x\big). \quad (9)$$

Los anteriores resultados serán usados para deducir la nueva tabla de integrales que se pretende presentar en este trabajo.

1.2 El operador $I^n_q(\cdot)$

Recientemente (Castillo & Galué, 2020) presentaron el operador q-integral fraccional de tipo Kober que contiene la análoga básica de la función hipergeométrica de Fox-Wright en la siguiente forma:

$$\mathrm{I}_q^{\boldsymbol{n}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\ (\beta_j,B_j)_{1,r-1}\end{bmatrix} f(x)$$
$$= \frac{x^{-\rho-1}}{\Gamma_q(M+1)}\int_0^x t^\rho\ r\psi^* s\left[\begin{matrix}(\alpha_1,A_1),\dots,(\alpha_{r-1},A_{r-1}),(-M,1)\\ (\beta_1,B_1),(\beta_2,B_2),\dots,(\beta_s,B_s)\end{matrix}\middle| q,q^n\frac{t}{x}\right] f(t)d_qt. \quad (10)$$

$$A_i,B_j\in\mathbb{R}^+, Re(\alpha_i)>0, Re(\beta_j)>0; i=1,\dots,r-1, j=1,\dots,s,$$
$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{s}} B_j - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}-1} A_i \geq 0, M\in\mathbb{N}_0, n\in\mathbb{N}, \rho\in\mathbb{C}, 0<q<1, \left|\frac{t}{x}\right|<1.$$

La ecuación (10) representa un operador de integración q-fraccional cuyo núcleo es la análoga básica de la función hipergeométrica de Fox-Wright, $r\varphi^* s$, las condiciones dadas al mencionado operador garantizan su convergencia dentro de la región $|t/x|<1$. Este operador generaliza al establecido por (Galué, 2012).

Adicionalmente, usando la q-integral de Jackson, dada en Gasper & Rahman (2004, pp. 19), establecieron la representación en serie para el operador dado en (10) de la siguiente manera1:

$$I_q^n\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\ (\beta_j,B_j)_{1,r-1}\end{bmatrix}=\frac{(1-q)}{\Gamma_q(M+1)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}q^{(\rho+1)k}\,r\psi^*s\left[\begin{matrix}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_{r-1},A_{r-1}),(-M,1)\\(\beta_1,B_1),(\beta_2,B_2),\ldots,(\beta_s,B_s)\end{matrix}|q,q^{n+k}\right]f(xq^k). \quad (11)$$

$$A_i,B_j\in\mathbb{R}^+,Re(\alpha_i)>0,Re(\beta_j)>0;i=1,\ldots,r-1,j=1,\ldots,s,$$

$$M\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{N},\rho\in\mathbb{C},\sum_{j=1}^{s}B_j-\sum_{i=1}^{r-1}A_i\geq 0,0<q<1,$$

donde el núcleo presente en el operador fue establecido en la siguiente forma

$$r\psi^*s\left[\begin{matrix}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_{r-1},A_{r-1}),(-M,1)\\(\beta_1,B_1),(\beta_2,B_2),\ldots,(\beta_s,B_s)\end{matrix}|q,z\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{M}\frac{(q^{-M};q)_k}{(q;q)_k}\frac{\prod_{i=1}^{r-1}(q^{\alpha_i};q)_{A_ik}}{\prod_{j=1}^{s}(q^{\beta_j};q)_{B_jk}}\left[(1-q)^k q^{\binom{k}{2}}\right]^{\sum_{j=1}^{s}B_j-\sum_{i=1}^{r-1}A_i}z^k \quad (12)$$

$$A_i,B_j\in\mathbb{R}^+,Re(\alpha_i)>0,Re(\beta_j)>0;i=1,\ldots,r-1,j=1,\ldots,s,$$

$$\sum_{j=1}^{s}B_j-\sum_{i=1}^{r-1}A_i\geq 0,M\in\mathbb{N}_0,0<q<1,|z|<1.$$

1.3 Resultado principal

En esta sección, el operador q-integral fraccional $I_q^n(\cdot)$ es aplicado a la función $x^\lambda{}_u\varphi_v(\cdot)$, con argumento ax, a $\in\mathbb{R}$, es decir,

$$I_q^n\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\ (\beta_j,B_j)_{1,s}\end{bmatrix}\left\{x^\lambda{}_u\varphi_v\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_u\\b_1,b_2,\ldots,b_v\end{matrix};q,ax\right]\right\}$$

El resultado será usado para evaluar el operador $I_q^n(\cdot)$ de las funciones q-elementales y q-especiales de (2) - (9).

En efecto, se desea obtener la q-integral de tipo Kober para el producto entre una q-función elemental y una q-especial

$$I_q^n\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\ (\beta_j,B_j)_{1,s}\end{bmatrix}\left\{x^\lambda{}_u\varphi_v\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_u\\b_1,b_2,\ldots,b_v\end{matrix};q,ax\right]\right\}.$$

En virtud de (1) y (11), las cuales contienen representaciones en series convergentes tanto para el operador como para la q-función hipergeométrica, la expresión dada arriba se expresa de la siguiente forma

$$I_q^n\left[\begin{matrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\(\beta_j,B_j)_{1,s}\end{matrix}\right]\left\{x^{\lambda}{}_u\varphi_v\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_u\\b_1,b_2,\dots,b_v\end{matrix};q,ax\right]\right\}$$

$$=\frac{(1-q)}{\Gamma_q(M+1)}\sum_{k=0}^{\infty}q^{(\rho+1)k}\ r\psi^*s\ \left[\begin{matrix}(\alpha_1,A_1),\dots,(\alpha_{r-1},A_{r-1}),(-M,1)\\(\beta_1,B_1),(\beta_2,B_2),\dots,(\beta_s,B_s)\end{matrix}|q,q^{n+k}\right]$$

$$\times\left\{(xq^k)^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_m(a_2;q)_m\cdots(a_u;q)_m}{(q;q)_m(b_1;q)_m(b_2;q)_m\cdots(b_v;q)_m}\left[(-1)^m q^{\binom{m}{2}}\right]^{1+v-u}(axq^k)^m\right\}.$$

Después de usar (12) e intercambiar las series, con fundamento en su convergencia absoluta se obtiene

$$I_q^n\left[\begin{matrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\(\beta_j,B_j)_{1,s}\end{matrix}\right]\left\{x^{\lambda}{}_u\varphi_v\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_u\\b_1,b_2,\dots,b_v\end{matrix};q,ax\right]\right\}$$

$$=\frac{(1-q)x^{\lambda}}{\Gamma_q(M+1)}\sum_{w=0}^{M}\frac{(q^{-M};q)_w}{(q;q)_w}\frac{\prod_{i=1}^{r-1}(q^{\alpha_i};q)_{A_iw}}{\prod_{j=1}^{s}(q^{\beta_j};q)_{B_jw}}\left[(1-q)^w q^{\binom{w}{2}}\right]^{\sum_{j=1}^{s}B_j-\sum_{i=1}^{r-1}A_i}q^{nw}$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_m(a_2;q)_m\cdots(a_u;q)_m}{(q;q)_m(b_1;q)_m(b_2;q)_m\cdots(b_v;q)_m}\left[(-1)^m q^{\binom{m}{2}}\right]^{1+v-u}(ax)^m\sum_{k=0}^{\infty}q^{(\rho+\lambda+w+m+1)k}\right\}\quad(13)$$

De acuerdo con la expansión q-binomial, establecida en Gasper & Rahman (2004, pp. 7) en la siguiente forma:

$$1\varphi0\left[\begin{matrix}\alpha\\-\end{matrix};q,x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha;q)_n}{(q;q)_n}x^n=\frac{(\alpha x;q)_\infty}{(x;q)_\infty},|x|<1,|q|<1.\quad(14)$$

Considerando en (14) $x=q^{\rho+\lambda+w+m+1}$ y $\alpha=q$ se deduce lo siguiente

$$\sum_{k=0}^{\infty}q^{(\rho+\lambda+w+m+1)k}=\frac{(q^{(\rho+\lambda+w+m+2};q)_\infty}{(q^{(\rho+\lambda+w+m+1};q)_\infty}.\quad(15)$$

Sustituyendo el resultado (15) en (13) se tiene

$$I_q^n\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\(\beta_j,B_j)_{1,s}\end{bmatrix}\left\{x^\lambda{}_u\varphi_v\begin{bmatrix}a_1,a_2,\ldots,a_u\\b_1,b_2,\ldots,b_v\end{bmatrix};q,ax\right\}$$
$$=\frac{(1-q)x^\lambda}{\Gamma_q(M+1)}\sum_{w=0}^{M}\frac{(q^{-M};q)_w}{(q;q)_w}\frac{\prod_{i=1}^{r-1}(q^{\alpha_i};q)_{A_iw}}{\prod_{j=1}^{s}(q^{\beta_j};q)_{B_jw}}\left[(1-q)^w q^{\binom{w}{2}}\right]^{\sum_{j=1}^{s}B_j-\sum_{i=1}^{r-1}A_i}q^{nw}$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_m(a_2;q)_m\cdots(a_u;q)_m}{(q;q)_m(b_1;q)_m(b_2;q)_m\cdots(b_v;q)_m}\left[(-1)^m q^{\binom{m}{2}}\right]^{1+v-u}(ax)^m\frac{(q^{(\rho+\lambda+w+m+2};q)_\infty}{(q^{(\rho+\lambda+w+m+1};q)_\infty}\right\}\quad(16)$$

Ahora se multiplica (16) por $\frac{(q^{(\rho+\lambda+w+1};q)_\infty}{(q^{(\rho+\lambda+w+1};q)_\infty}\frac{(q^{(\rho+\lambda+w+2};q)_\infty}{(q^{(\rho+\lambda+w+2};q)_\infty}$ para luego aplicar un resultado conocido que permita obtener una representación compacta de nuestro resultado, en consecuencia,

$$I_q^n\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\(\beta_j,B_j)_{1,s}\end{bmatrix}\left\{x^\lambda{}_u\varphi_v\begin{bmatrix}a_1,a_2,\ldots,a_u\\b_1,b_2,\ldots,b_v\end{bmatrix};q,ax\right\}$$
$$=\frac{(1-q)x^\lambda}{\Gamma_q(M+1)}\sum_{w=0}^{M}\frac{(q^{-M};q)_w}{(q;q)_w}\frac{\prod_{i=1}^{r-1}(q^{\alpha_i};q)_{A_iw}}{\prod_{j=1}^{s}(q^{\beta_j};q)_{B_jw}}\Big[(1$$
$$-q)^w q^{\binom{w}{2}}\Big]^{\sum_{j=1}^{s}B_j-\sum_{i=1}^{r-1}A_i}q^{nw}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_m(a_2;q)_m\cdots(a_u;q)_m}{(q;q)_m(b_1;q)_m(b_2;q)_m\cdots(b_v;q)_m}\left[(-1)^m q^{\binom{m}{2}}\right]^{1+v-u}(ax)^m$$
$$\times\frac{(q^{(\rho+\lambda+w+m+2};q)_\infty}{(q^{(\rho+\lambda+w+m+1};q)_\infty}\frac{(q^{(\rho+\lambda+w+1};q)_\infty}{(q^{(\rho+\lambda+w+1};q)_\infty}\frac{(q^{(\rho+\lambda+w+2};q)_\infty}{(q^{(\rho+\lambda+w+2};q)_\infty}.$$

$$(\alpha;q)_n=\frac{(\alpha;q)_\infty}{(\alpha q^n;q)_\infty}\quad(17)$$

se deduce

$$I_q^n\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\(\beta_j,B_j)_{1,s}\end{bmatrix}\left\{x^\lambda{}_u\varphi_v\begin{bmatrix}a_1,a_2,\ldots,a_u\\b_1,b_2,\ldots,b_v\end{bmatrix};q,ax\right\}$$
$$=\frac{(1-q)x^\lambda}{\Gamma_q(M+1)}\sum_{w=0}^{M}\frac{(q^{-M};q)_w}{(q;q)_w}\frac{\prod_{i=1}^{r-1}(q^{\alpha_i};q)_{A_iw}}{\prod_{j=1}^{s}(q^{\beta_j};q)_{B_jw}}\left[(1-q)^w q^{\binom{w}{2}}\right]^{\sum_{j=1}^{s}B_j-\sum_{i=1}^{r-1}A_i}q^{nw}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_m(a_2;q)_m\cdots(a_u;q)_m}{(q;q)_m(b_1;q)_m(b_2;q)_m\cdots(b_v;q)_m}\left[(-1)^m q^{\binom{m}{2}}\right]^{1+v-u}(ax)^m$$
$$\times\frac{(q^{(\rho+\lambda+w+1};q)_m}{(q^{(\rho+\lambda+w+2};q)_m}\frac{(q^{(\rho+\lambda+w+2};q)_\infty}{(q^{(\rho+\lambda+w+1};q)_\infty}\frac{(q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}$$

y al usar nuevamente (17) y (1) se obtiene

$$I_q^n\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\(\beta_j,B_j)_{1,s}\end{bmatrix}\left\{x^\lambda{}_u\varphi_v\begin{bmatrix}a_1,a_2,\ldots,a_u\\b_1,b_2,\ldots,b_v\end{bmatrix};q,ax\right\}$$

$$= \frac{\Gamma_q(\rho+\lambda+1)\mathrm{x}^{\lambda}}{\Gamma_q(M+1)\Gamma_q(\rho+\lambda+2)} \sum_{\mathrm{w}=0}^{M} \frac{(q^{-M};q)_{\mathrm{w}}}{(q;q)_{\mathrm{w}}} \frac{\prod_{i=1}^{r-1}(q^{\alpha_i};q)_{A_i\mathrm{w}}}{\prod_{j=1}^{s}(q^{\beta_j};q)_{B_j\mathrm{w}}} \frac{(q^{(\rho+\lambda+1}; q)_w}{(q^{(\rho+\lambda+2}; q)_w}$$
$$\times \left[(1-q)^{\mathrm{w}} q^{\binom{\mathrm{w}}{2}}\right]^{\sum_{j=1}^{s} B_j - \sum_{i=1}^{r-1} A_i} \quad \mathrm{q}^{\mathrm{nw}}\ {}_{u+1}\varphi_{v+1}\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_u, q^{\rho+\lambda+w+1} \\ b_1, b_2, \ldots, b_v, q^{\rho+\lambda+w+2} \end{matrix}; q, ax\right].$$

Haciendo

$$a_{w,q} = \frac{\Gamma_q(\rho+\lambda+1)}{\Gamma_q(M+1)\Gamma_q(\rho+\lambda+2)} \frac{(q^{-M};q)_{\mathrm{w}}}{(q;q)_{\mathrm{w}}} \frac{\prod_{i=1}^{r-1}(q^{\alpha_i};q)_{A_i\mathrm{w}}}{\prod_{j=1}^{s}(q^{\beta_j};q)_{B_j\mathrm{w}}} \frac{(q^{(\rho+\lambda+1}; q)_w}{(q^{(\rho+\lambda+2}; q)_w}$$
$$\times\ \mathrm{q}^{\mathrm{nw}}\left[(1-q)^{\mathrm{w}} q^{\binom{\mathrm{w}}{2}}\right]^{\sum_{j=1}^{s} B_j - \sum_{i=1}^{r-1} A_i}, \tag{18}$$

se tiene

$$I_q^n\left[\begin{matrix}\boldsymbol{\rho}, (M,1), (\alpha_i, A_i)_{1,r-1} \\ (\beta_j, B_j)_{1,s}\end{matrix}\right]\left\{x^{\lambda}\ {}_u\varphi_v\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_u \\ b_1, b_2, \ldots, b_v \end{matrix}; q, ax\right]\right\}$$
$$= \mathrm{x}^{\lambda} \sum_{w=0}^{M} a_{w,q}\ {}_{u+1}\varphi_{v+1}\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_u, q^{\rho+\lambda+w+1} \\ b_1, b_2, \ldots, b_v, q^{\rho+\lambda+w+2} \end{matrix}; q, ax\right] \tag{19}$$

$$A_i, B_j \in \mathbb{R}^+, M \in \mathbb{N}_0, Re(\alpha_i) > 0, Re(\beta_j) > 0; i = 1, \ldots, r-1, j = 1, \ldots, s,$$
$$n \in \mathbb{N}, a, \lambda \in \mathbb{R}, Re(\rho) \neq -1-\lambda, -2-\lambda, \ldots;\ b_1, b_2, \ldots, b_v \neq q^{-m}, m = 0,1,\ldots$$
$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{s}} B_j - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}-1} A_i \geq 0, 0 < q < 1.$$

La ecuación (19) representa el resultado principal que se quería obtener.

Casos particulares:

El operador q-integral fraccional generalizado de tipo Kober, que contiene la análoga básica de la función hipergeométrica de Fox-Wright de la q-función elemental $x^{\lambda} e_q$ (x), se deriva directamente de (19), haciendo $u = v + 1, a_j = b_j, j = 1,\ldots,v, a_{v+1} = 0, a = 1$, para tener

$$I_q^n\left[\begin{matrix}\boldsymbol{\rho}, (M,1), (\alpha_i, A_i)_{1,r-1} \\ (\beta_j, B_j)_{1,s}\end{matrix}\right]\left\{x^{\lambda}\ {}_1\varphi_0\left[\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}; q, x\right]\right\} = \mathrm{x}^{\lambda} \sum_{\mathrm{w}=0}^{M} a_{w,q}\ {}_2\varphi_1\left[\begin{matrix} 0, q^{\rho+\lambda+w+1} \\ q^{\rho+\lambda+w+2} \end{matrix}; q, x\right].$$

Dado que los parámetros iguales en el numerador y denominador se simplifican. De acuerdo con (2) se obtiene

$$I_q^n\left[\begin{matrix}\boldsymbol{\rho}, (M,1), (\alpha_i, A_i)_{1,r-1} \\ (\beta_j, B_j)_{1,s}\end{matrix}\right]\left\{\mathrm{x}^{\lambda} e_q\ (x)\right\}$$
$$= \mathrm{x}^{\lambda} \sum_{w=0}^{M} a_{w,q}\ {}_2\varphi_1(0, q^{\rho+\lambda+w+1}; q^{\rho+\lambda+w+2}; q, x)$$

$$A_i, B_j \in \mathbb{R}^+, M \in \mathbb{N}_0, Re(\alpha_i) > 0, Re(\beta_j) > 0; i = 1, \ldots, r-1, j = 1, \ldots, s, n \in \mathbb{N},$$
$$\lambda \in \mathbb{R}, Re(\rho) \neq -1-\lambda, -2-\lambda, \ldots; \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{s}} B_j - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}-1} A_i \geq 0, 0 < q < 1, |x| < 1.$$

Mediante un procedimiento similar, se obtiene el operador q-integral fraccional generalizado de tipo Kober que contiene a la análoga básica de la función hipergeométrica de Fox-Wright de las q-funciones mostradas en la Tabla I.

Tabla I. El operador q-integral fraccional $I_q^{\,n}(\cdot)$ de algunas q-funciones

$f(x)$	$I_q^n\left[\begin{matrix}\boldsymbol{\rho},(M,1),(\alpha_i,A_i)_{1,r-1}\\ (\beta_j,B_j)_{1,r-1}\end{matrix}\right]f(x)$	No
x^λ	$\frac{\Gamma_q(\rho+\lambda+1)x^\lambda}{\Gamma_q(M+1)\Gamma_q(\rho+\lambda+2)}\ {}_{r+1}\psi^*_{s+1}\left[\begin{matrix}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_{r-1},A_{r-1}),(\rho+\lambda+w+1,1),(-M,1)\\ (\beta_1,B_1),\ldots,(\beta_s,B_s),(\rho+\lambda+w+2,1)\end{matrix}\middle\vert q,q^n\right]$	(20)
$x^\lambda e_q(x)$	$x^\lambda\sum_{w=0}^{M}a_{w,q}\ {}_2\varphi_1(0,q^{\rho+\lambda+w+1};q^{\rho+\lambda+w+2};q,x)$	(21)
$x^\lambda E_q(x)$	$x^\lambda\sum_{w=0}^{M}a_{w,q}\ {}_1\varphi_1(q^{\rho+\lambda+w+1};q^{\rho+\lambda+w+2};q,-x)$	(22)
$x^\lambda J_v^{(1)}(\sqrt{x};q)$	$\frac{(q^{v+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}(\sqrt{x}/2)^v x^\lambda\sum_{w=0}^{M}a_{w,q}\ {}_3\varphi_2(0,0,q^{\rho+\lambda+w+1};q^{v+1},q^{\rho+\lambda+w+2};q,-\frac{x}{4})$	(23)
$x^\lambda J_v^{(2)}(\sqrt{x};q)$	$\frac{(q^{v+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}(\sqrt{x}/2)^v x^\lambda\sum_{w=0}^{M}a_{w,q}\ {}_1\varphi_2(q^{\rho+\lambda+w+1};q^{v+1},q^{\rho+\lambda+w+2};q,-\frac{xq^{v+1}}{4})$	(24)
$x^\lambda L_n^\alpha(x;q)$	$\frac{(q^{\alpha+1};q)_n}{(q;q)_n}x^\lambda\sum_{w=0}^{M}a_{w,q}\ {}_2\varphi_2(q^{-n},q^{\rho+\lambda+w+1};q^{\alpha+1},q^{\rho+\lambda+w+2};q,-xq^{n+\alpha+1})$	(25)
$x^\lambda P_n^{(\alpha,\beta)}(x;q)$	$\frac{(q^{\alpha+1};q)_n}{(q;q)_n}x^\lambda\sum_{w=0}^{M}a_{w,q}\ {}_3\varphi_2(q^{-n},q^{\alpha+\beta+n+1},q^{\rho+\lambda+w+1};q^{\alpha+1},q^{\rho+\lambda+w+2};q,xq)$	(26)
$x^\lambda W_n(x;b,q)$	$(-1)^n(b;q)_n q^{n(\frac{n+1}{2})}x^\lambda\sum_{w=0}^{M}a_{w,q}\ {}_3\varphi_2(q^{-n},0,q^{\rho+\lambda+w+1};b,q^{\rho+\lambda+w+2};q,x)$	(27)
$x^\lambda S_n(x;p,q)$	$(-1)^n(p;q)_n q^{-n(\frac{2n+1}{2})}x^\lambda\sum_{w=0}^{M}a_{w,q}\ {}_2\varphi_2(q^{-n},q^{\rho+\lambda+w+1};p,q^{\rho+\lambda+w+2};q,-q^{n+\frac{3}{2}}x)$	(28)

Conclusiones

Dentro de las principales conclusiones asociadas a este trabajo están las siguientes:

Es posible aplicar el operador $I_q^{\,n}(\cdot)$ a la análoga básica de la función hipergeométrica generalizada.

El resultado de aplicar el operador $I_q^{\,n}(\cdot)$ a la análoga básica de la función hipergeométrica generalizada es una suma finita, cuyos términos contienen a esta función.

A partir del resultado principal, es posible evaluar el operador de ciertas q-funciones elementales y especiales.

Los resultados obtenidos generalizan a los obtenidos por otros investigadores.

Para la bibliografía especializada en cálculo q-fraccional emerge una tabla de integrales.

Agradecimientos

Los autores expresan sus agradecimientos al Centro de Investigaciones de la Universidad de la

Guajira – Colombia y al CONDES – Universidad del Zulia – Venezuela, por el soporte financiero.

Referencias

Agarwal, R. P. (1960). A q-analogue of MacRobert's generalized E-function. Ganita, 11, 49-63.

Castillo J., & Galué, L. (2020). On a fractional q-integral operator involving the basic analogue of Fox-Wright function. *International Journal of Applied Mathematics*, 33(6), 969-994. doi: 10.12732/ijam.v33i6.2.

Castillo J., & Galué, L. (2022). On the generalized Kober type fractional q-integral operator involving a basic analogue of H-function. *International Journal of Applied Mathematics*, 35(2), 249-261; doi: 10.12732/ijam.v35i2.4.

Delgado, M., & Galué, L. (2008). Fractional q-integral operator involving basic hypergeometric function. *Algebras Groups Geometries*, 25, 53-74.

Galué, L. (2009). Generalized Erdérlyi-Kober fractional q-integral operator. *Kuwait J. Sci. Eng*., 36, 21-34.

Galué, L. (2012). Some results on a fractional q-integral operator involving generalized basic hypergeometric function. *Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia*, 35, 302 -310.

Garg, M., & Chanchlani, L. (2011). Kober fractional q-derivative operators. *Le Matematiche*, 66, 13-26.

Gasper, G., & Rahman, M. (2004). Basic Hypergeometric Series. *Cambridge Univ. Press*.

Kalla, S. L., Yadav, R. K., & Purohit, S.D. (2005). On the Riemann-Liouville fractional q-integral operator involving a basic analogue of Fox H-function. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 8, 313-322.

Saxena, R. K., Modi, G. C., & Kalla, S. L. (1983). A basic analogue of Fox H-function. *Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia*, 6, 139-143.

Saxena, R. K., & Kumar, R. (1990). Recurrence relations for the basic analogue of the H-function. J. Nat. Acad. Math., 8, 48-54.

Saxena, R. K., Yadav, R. K., Purohit, S. D., & Kalla, S. L. (2005). Kober fractional q-integral operator of the basic analogue of the *H*-function. *Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia*, 28, 154-158.

Yadav, R. K., & Purohit, S. D. (2004). Application of Riemann-Liouville fractional q-integral operator to basic hypergeometric functions. *Acta Ciencia Indica*, 30, 593-600.

Srivastava, H. M., & Agarwal, A. K. (1989). Generating functions for a class of q-polynomials. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 4, 99-109.

Yadav, R. K., & Purohit, S. D. (2006). On applications of Kober fractional q-integral operator to certain basic hypergeometric functions. *J. Rajasthan Acad. Phy. Sci*., 5, 437-448.

Yadav, R. K., Purohit, S. D., & Kalla, S. L. (2007). Kober fractional q-integral of multiple basic hypergeometric function, *Algebras Groups Geometries,* 24(i), 55-74.

Yadav, R. K., Kalla, S. L., & Kaur, G. (2010). On fractional q-integral operator involving the basic multiple hypergeometric functions. *Algebras Groups Geometries,* 27, 97-116.