Eco matemático ISSN: 1794-8231 (Impreso), E-ISSN: 2462-8794 (En línea) Volumen 14 (1) Enero-Junio de 2023, páginas 43-56

Eco Matemático
Scientific Journal of Matematics

El Modelo de Pirie y Kieren para la comprensión matemática del concepto de razón trigonométrica

The Pirie and Kieren Model for the mathematical understanding of the concept of trigonometric ratio

Carlos Andrés Teleche-Capote[a], Juan Pablo Salazar-Torres[b]

[a]Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, catelecheca@unal.edu.co, https://orcid.org/0009-0007-8994-3492, Tecnológico de Antioquia, Medellín, Colombia

[b]Doctor en Ciencias Sociales y de la Educación, juanp.salazar@unisimon.edu.co, https://orcid.org/0000-0001-6826-203X , Universidad Simón Bolívar, Cúcuta, Colombia

Forma de citar: Salazar-Torres, J. P., y Teleche-Capote, C. A., (2023). El Modelo de Pirie y Kieren para la comprensión matemática del concepto de razón trigonométrica. *Eco Matemático*, 14(1). 43-56. https://doi.org/10.22463/17948231.4086

Recepción: Agosto 28, 2022
Aprobación: Diciembre 16, 2022

Palabras clave

Modelo de Pirie y Kieren, Didáctica de la Matemática, Comprensión Matemática, Razón Trigonométrica.

Resumen: El desarrollo de la comprensión matemática ha sido uno de los retos fundamentales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El artículo, presenta una reflexión del modelo de Pirie y Kieren como una alternativa didáctica para la comprensión del concepto de razón trigonométrica, derivado de un estudio de tesis doctoral en el campo de la educación matemática que busca desarrollar un esquema de aprendizaje de este concepto fundamental de las matemáticas en el marco de este modelo. Para el cumplimiento de este propósito, se abordó la alternativa metodológica del análisis de contenido con perspectiva cualitativa con el fin de encontrar y describir comprensiones y significaciones del uso de este modelo para la enseñanza y comprensión de conceptos matemáticos. A nivel general, se concluye que, por medio del modelo propuesto es posible visibilizar y promover la evolución de la comprensión de los conceptos matemáticos; gracias a las características propias de la teoría que permiten la movilización cognitiva y el estudio que tienen las distintas representaciones dentro del proceso de comprensión de los objetos y conceptos matemáticos.

*Autor para correspondencia catelecheca@unal.edu.co

https://doi.org/10.22463/17948231.4086

Keywords

Pirie and Kieren Model, Mathematics Didactics, Mathematical Comprehension, Trigonometric Ratio.

Abstract: The development of mathematical understanding has been one of the fundamental challenges in the processes of teaching and learning mathematics. This article presents a reflection of Pirie and Kieren's model as a didactic alternative for the understanding of the concept of trigonometric ratio, derived from a doctoral thesis study in the field of mathematics education that seeks to develop a learning scheme for this fundamental concept of mathematics within the framework of this model. For the fulfillment of this purpose, the methodological alternative of content analysis with a qualitative perspective was approached in order to find and describe understandings and meanings of the use of this model for the teaching and understanding of mathematical concepts. At a general level, it is concluded that, by means of the proposed model, it is possible to make visible and promote the evolution of the understanding of mathematical concepts; thanks to the characteristics of the theory that allow the cognitive mobilization and the study of the different representations within the process of understanding mathematical objects and concepts.

Introducción

Las teorías y modelos educativos son visiones o enfoques pedagógicos que buscan orientar a los profesionales en el análisis, sistematización y estructuración de programas de estudio y estrategias de enseñanza y aprendizaje; así como en la comprensión de algún contenido concreto. Gracias al conocimiento que estas confieren es posible apreciar las diversas formas en las que es posible formular programas o estrategias, planificar su ejecución e identificar aquellos elementos determinantes, tanto en la planeación como en las intervenciones didácticas.

Es así como, dentro de la educación matemática, los modelos y teorías han impactado históricamente como marcos teóricos a partir de los cuales se desarrollan estrategias metodológicas y se fomentan experiencias que permiten alcanzar una mejor comprensión de los conceptos matemáticos; con base en determinados niveles y características validadas dentro de las respectivas investigaciones. Como ejemplo particular se exhibe, para este caso, el modelo de Pirie y Kieren; este modelo ha sido el punto de partida para múltiples investigaciones tanto de maestría como de doctorado, permitiendo el desarrollo de estrategias de comprensión, tales como: el módulo de aprendizaje para la comprensión de términos positivos (Zapata y Sucerquia, 2009), la relación inversa entre cuadraturas y tangentes (Londoño, 2011), la comprensión de la tasa de variación por medio de la cual se aproxima al concepto de derivada (Villa, 2011); el uso de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele, para la comprensión de la elipse como lugar geométrico (Santa, 2011), la comprensión del concepto de continuidad (Rendón, 2011) y la comprensión del concepto de límite de una función en un punto (Arias y Becerra, 2015).

En efecto, la trigonometría es una disciplina que tiene cabida en múltiples campos del saber y resulta desafiante comprender cuando su estudio se basa en la memorización de fórmulas sin contexto alguno; frente a este obstáculo, se han propuesto modelos teóricos como los de Van Hiele (1986) y el de Pirie y Kieren (1989), orientados al mejoramiento de la comprensión de conceptos matemáticos y geométricos asociados a la trigonometría; a través de niveles jerárquicos de pensamiento geométrico o de comprensión matemática que permitan un entendimiento mucho más profundo tanto de los conceptos como de las estructuras matemáticas. El objetivo de recurrir a estos modelos es el desarrollo de metodologías que mejoren la comprensión de la trigonometría y su relación tanto con otras áreas del conocimiento, como con el mundo real.

En caso contrario, este proceso puede tornarse monótono e inútil para los estudiantes, dado que no les dota de habilidad alguna, en el campo de las matemáticas al tratarse de un simple acto de memorización; razón por la cual, para evitar esto, es necesario que además de los usuales conceptos y ecuaciones, también se disponga de herramientas y estrategias que permitan a los estudiantes explorar, relacionar, conjeturar y demostrar los conceptos aprendidos durante el curso de trigonometría.

A partir de lo anterior, el artículo se enfoca en la importancia de las matemáticas en la sociedad y el bajo rendimiento académico de los estudiantes en esta área. Se mencionan iniciativas para reformar la educación matemática y se afirma que el aprendizaje de las matemáticas produce resultados cognitivos y afectivos. Se identifican varios tipos de aprendizaje y se destaca que el aprendizaje de las matemáticas requiere procesos cognitivos superiores debido a la naturaleza interrelacionada y abstracta de los contenidos y procesos matemáticos. Se señala que los cambios en la enseñanza de las matemáticas tienen un gran impacto en los estudiantes y se destaca la influencia de factores cognitivos, afectivos y ambientales en las dificultades de los estudiantes en la comprensión de las matemáticas. Finalmente, se menciona el bajo desempeño de los países latinoamericanos en pruebas internacionales de matemáticas y la importancia de considerar lo que sucede al interior de las aulas de clase para mejorar el aprendizaje.

Un modelo tiene como objetivo la representación simplificada de un fenómeno; un buen ejemplo de ello son los ábacos, los bloques y las regletas de Cuisenaire; que suelen ser empleados en representaciones numéricas, de operaciones o de propiedades matemáticas. No obstante, también existen modelos educativos de enseñanza, que tienen como propósito no solo la representación, sino el uso de la misma para la enseñanza dentro de un campo determinado; estos modelos tienen diferentes formas de ser estructurados e implementados dependiendo de su tipo y de la disciplina en la que se aplica; por ejemplo los modelos matemáticos buscan representar fenómenos recurrentes a través de expresiones matemáticas, para así poder comprender su comportamiento e incluso predecirlo en el futuro (Jaime y Gutiérrez, 1990).

En el caso de la física por ejemplo, las Leyes de Newton son modelos matemáticos que describen la relación entre las fuerzas del universo, permitiendo comprender la manera como los cuerpos interactúan dentro de determinadas condiciones; mientras que las teorías del aprendizaje como las formuladas por Piaget, buscan describir la naturaleza del conocimiento y el proceso de aprendizaje de los seres humanos, para comprender como este se manifiesta y prevalece en la mente de los mismos, para de ese modo poder emplear este conocimiento en estrategias que permitan ofrecer estímulos a la mente humana, para los cuales se pueda esperar una respuesta positiva (Jaime y Gutiérrez, 1990). La creación de un modelo se logra a través de cuatro fases, las cuales pueden apreciarse en la Figura 1.

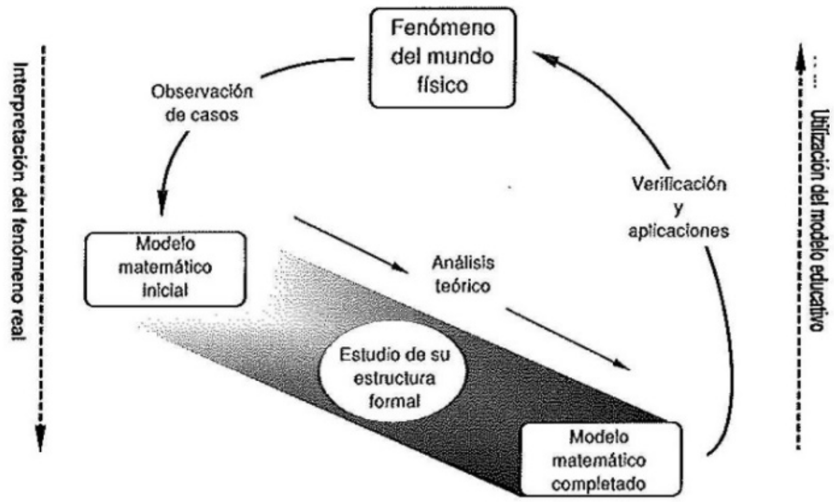

Figura 1. Creación y utilización de un modelo matemático

Fuente: Jaime y Gutiérrez (1990).

En primera instancia se parte de una necesidad y la oportunidad; un modelo matemático es creado cuando se aprecian hechos repetitivos bajo condiciones similares; de modo que con el objetivo de comprender estos hechos y predecir su ocurrencia en el futuro, se procede a recopilar datos sobre el fenómeno que permitan representarlo tanto de forma gráfica como en forma de ecuaciones. Este proceso ha venido siendo llevado a cabo por la humanidad desde tiempos antiguos, primero con la astronomía y las ciencias de la naturaleza, para después pasar a disciplinas más sofisticadas, tales como la aeronáutica o la electrónica (Jaime y Gutiérrez, 1990).

A partir de las observaciones realizadas, se busca simular el fenómeno para comprender los principios de su funcionamiento; esto se logra en las ciencias exactas a través de expresiones que permiten apreciar su funcionamiento con respecto a una variable que por lo general es el tiempo. Esta fase suele ser la más dispendiosa, pues el observador cuenta con pocos indicios para poder construir su simulación y su única forma de obtener retroalimentación es por medio de la comparación de su simulación con el fenómeno real, para así determinar qué tan aproximado resulta al objetivo final (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Después de que la expresión a través de la cual es posible simular el fenómeno haya sido comprobada, se procede a realizar un proceso de estudio teórico, para así dar fundamentos conceptuales al modelo. Gracias a esta complementación teórica, la simulación original se ve modificada, convirtiéndose en el modelo final, que habrá de ser nuevamente confrontado con la realidad para determinar si las modificaciones no comprometieron su precisión (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Finalmente, una vez el modelo haya sido comprobado, procede a ser difundido y aplicado, para que la comunidad académica lo emplee en beneficio de las diversas disciplinas científicas sobre las que tenga validez; tal como sucedió con el modelo matemático que describe las interacciones entre los cuerpos para el estudio del sistema solar, por medio del cual fue posible identificar la influencia de un cuerpo exterior después llamado Plutón, además de estimar su tamaño, 25 años antes de que el mismo pudiese ser avistado por primera vez en 1930 (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Es importante tener en cuenta que un solo modelo no puede responder a todas las necesidades de una disciplina; de modo que los docentes no deben confiar en un solo modelo para resolver todos los problemas que identifican en el aula. Siendo las cosas así, resulta claro que el docente debe disponer de un amplio repertorio de recursos metodológicos y adaptarse dependiendo de las dificultades que afronte, especialmente en el área de matemáticas, en la que los estudiantes suelen asumir una posición pesimista frente al conocimiento, señalando que el mismo no tiene utilidad para ellos, para justificar su fracaso; de modo que es importante no solo presentar los temas con claridad y sencillez, sino también implementar mecanismos que fomenten la motivación y la curiosidad intelectual del estudiante, para que se concentre en continuar avanzando en el proceso.

A este respecto, Brousseau (1986), señala que los obstáculos en la comprensión de conceptos matemáticos, se debe a la búsqueda de concepciones universales, que cuando fracasan, hacen parecer el tema como ininteligible; pero que dada la confianza que han obtenido a lo largo de un determinado proceso, son conservadas, asumiendo que el problema es el tema de estudio en lugar de la concepción que se utiliza. De este modo, el surgimiento de contradicciones es una evidencia clara de la existencia de problemas con los recursos de los que se dispone para proceder a realizar la interpretación del tema en cuestión, evitando el apego a un solo paradigma de interpretación.

Para Sierpinska (1992, p.35) "…La profundidad de la comprensión podría ser medida por el número y la calidad de los actos de comprensión que uno ha experimentado o por el número de obstáculos epistemológicos que ha superado", es decir, que la capacidad del aprendiz para establecer relaciones entre objetos depende de diversos factores tales como: el sujeto de comprensión, el objeto de comprensión, la base de comprensión y las operaciones mentales básicas de comprensión. Algunas de las teorías que buscan explicar la comprensión de conceptos matemáticos, se enfocan en la superación de los obstáculos cognitivos y epistemológicos de Sierpinska; mientras que otras intentan realizar representaciones múltiples y las demás se relacionan tanto con las investigaciones de Pirie y Kieren como con la perspectiva de Anna Sfard, por medio de las definiciones constructivistas:

El conocimiento no es recibido pasivamente por el sujeto cognitivo sino activamente construido.

La función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica.

Desde el punto de vista de Dubinsky (1991), el cual postuló la teoría de APOE, por sus siglas: Acción, Proceso, Objeto y Esquema; la comprensión es entendida como un proceso perpetuo de construcción de esquemas iterativos por medio de la abstracción reflexiva, que es un proceso cognitivo que implica la reconstrucción y reorganización de las acciones físicas o mentales en un plano más elevado de pensamiento (Ayers et al., 1998). Para Carpenter y Lehrer (1999, p.20), la comprensión es un proceso en evolución, que emerge de cinco tipos de actividades mentales: a) construcción de relaciones, b) extensión y aplicación del conocimiento matemático, c) reflexión sobre las experiencias, d) articulación de lo que uno conoce y e) construcción de conocimiento matemático por uno mismo.

Por ende, a partir de las teorías mencionadas, es posible señalar que los procesos de comprensión de conceptos matemáticos cuentan con dos posibles enfoques de análisis: el iterativo y el nivelador; siendo el primero un proceso cíclico repetitivo que parte de los conocimientos previos del estudiante y permite el traslado entre niveles dependiendo de las características del concepto en cuestión; mientras que el segundo enfoque es secuencial y parte desde los conocimientos básicos del estudiante (Murillo, 2013). El estudio de los modelos pedagógicos para el mejoramiento de los procesos de comprensión de los conceptos matemáticos permite a los docentes comprender la forma como los estudiantes aprenden y por ende elegir de una forma mucho más efectiva los estímulos que deben poner en marcha para obtener resultados de aprendizaje positivos.

Según los estudios de Pólya (1962), Skemp (1976) y Davis (1978) citados por Meel (2003), la comprensión matemática implica el conocimiento y entendimiento profundo de conceptos, procedimientos y reglas de esta disciplina; es decir, el aprendiz no solo debe tener presentes las reglas y ecuaciones en su memoria, sino también comprender el razonamiento detrás de cada uno de estos recursos, para así poder aplicarlos en cualquier situación. Pólya (1962), propuso un modelo que comprende cuatro niveles de comprensión matemática, a saber: la mecánica, la inductiva, la racional y la intuitiva; siendo el primero de estos niveles el que corresponde a la memorización y aplicación sin racionalización; seguido del nivel inductivo en el que se emplean los conocimientos previos para alcanzar una mejor comprensión de los nuevos; después se aborda el nivel racional en el que se busca comprender la lógica que gobierna las reglas y procedimientos con los que se trabaja y finalmente en el nivel intuitivo, los estudiantes desarrollan la capacidad de desarrollar problemas matemáticos, poniendo en marcha todos los logros alcanzados en los niveles anteriores.

Por su parte, Skemp (1976), hace una distinción entre la comprensión matemática y la comprensión del conocimiento, estableciendo que la primera puede ser instrumental; es decir, que se basa en la utilización de las reglas y procedimientos sin ahondar en su trasfondo; aunque también puede ser relacional, lo que significa que se enfoca precisamente en la comprensión del trasfondo de los contenidos matemáticos. Mientras que Davis (1978), explicó la comprensión en el campo de las matemáticas, se basa en el relacionamiento entre conceptos y procedimientos.

Entre los conceptos que se tiene en cuenta en la enseñanza de las matemáticas cabe resaltar el de razón trigonométrica; dado que, en su calidad de objeto matemático, carece de asociación con una persona o época particular y se relaciona con otros conocimientos trigonométricos. Según Montiel (2005, P.67), “los estudios históricos sobre la trigonometría se dividen en dos momentos, el de sus inicios prácticos y el de sus fundamentos teóricos”.

La trigonometría encuentra su origen en los estudios de diversas disciplinas como la astronomía, la geografía y la ingeniería. Van Brummelen (2009), señala que este campo del conocimiento deriva de los estudios geocéntricos de Ptolomeo y se consolida durante el proceso de estructuración del modelo heliocéntrico de Copérnico; de modo que se trata de un área del conocimiento que ha tenido un impacto importante en el desarrollo de la ciencia desde tiempos antiguos; razón por la cual, el presente trabajo se enfoca en la optimización de la experiencia de aprendizaje alrededor de las razones trigonométricas, partiendo de las representaciones y sentidos usados dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje, teniendo en cuenta que el conocimiento disponible sobre complejidad didáctica enfocada en contenidos escolares de trigonometría y específicamente de las razones de seno y coseno, es escasa (Byers, 2010).

Algunos estudios sobre la didáctica de la trigonometría hacen referencia a las representaciones y sentidos que se emplean dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje de las razones trigonométricas seno y coseno. Brown (2005), señala que estas razones trigonométricas son empleadas generalmente como coordenadas, distancias o cocientes. Weber (2008), menciona, además, que estas nociones trigonométricas se suelen representar principalmente como cocientes y como funciones. Byers (2010), identificó seis dominios conceptuales que caracterizan los sistemas de representación; estos son: el triángulo rectángulo, las razones trigonométricas, la función trigonométrica, la circunferencia unidad, la onda sinusoidal y el vector. Por último, los trabajos hacen evidentes las dificultades que experimentan los estudiantes cuando se trata de manipular, interpretar y dotar de significado las razones, ecuaciones, identidades y funciones asociadas a las razones trigonométricas (Martín, 2013).

De este modo, es posible señalar que los estándares básicos de competencia en la asignatura de matemáticas, dentro del sistema educativo colombiano, se encuentran orientados hacia la conceptualización, la comprensión de las posibilidades y el desarrollo de competencias para poder asumir desafíos actuales; incluyendo la adquisición de informaciones y el ejercicio de competencias o formas de actuación que puedan ser clasificadas como características del pensamiento matemático en general y lógico en particular. Con lo cual, el modelo de Pirie y Kieren funciona como un mecanismo de análisis de la gradación de la comprensión de un concepto matemático.

Metodología

El desarrollo de la reflexión crítica es una consecuencia directa de la capacidad hermenéutica y de construcción de sentido que tienen los investigadores en función de la comprensión teórica del fenómeno aquí estudiado, que, para el caso en particular, fue la comprensión y descripción del modelo de Pirie y Kieren para el desarrollo de la comprensión matemática, en particular, de un campo conceptual objetivo como lo fue, la comprensión del concepto de razón trigonométrica en los estudiantes.

Por tanto, la reflexión aquí planteada, se sustentó desde un enfoque cualitativo, que, de acuerdo con Taylor y Bogdan (1986, p.21) “se refiere en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas y la conducta observable”, esto es, el interés por generar unas reflexiones al modelo planteado y la manera en que se fortalece la construcción de sentido y significación de los variados conceptos matemáticos.

Para ello, se abordó el análisis de contenido cualitativo (ACC) como una perspectiva de análisis cualitativo que pretende obtener “matices de significación, complejidad, profundidad y carácter relativo de los mensajes textuales” (Riba, 2017, p.7), centrándose en el análisis del contenido (Bardin, 1996) asociado al modelo de Pirie y Kieren para el desarrollo de la comprensión matemática.

Resultados y Análisis: Aproximaciones al Modelo de Pirie y Kieren

Se trata de un modelo que ofrece herramientas para facilitar la lectura y relación de conceptos matemáticos; de modo que sea posible fomentar el crecimiento de la comprensión sobre un tema. Su origen data de los años ochenta, de la mano de Susan Pirie y Thomas Kieren, teniendo en cuenta el constructivismo social de Vygotsky y la Epistemología genética de Piaget (Rendon, 2011); estos investigadores propusieron un marco teórico que permitiese hacer seguimiento a la evolución de la comprensión sobre un objeto matemático de estudio; tratándose de este modo, de una teoría constructivista, ya que según Lyndon (2000), los aprendices deben darse a la tarea de reflexionar y reorganizar sus constructos personales, para así construir estructuras conceptuales nuevas.

Para Pirie y Kieren (1994), la comprensión puede ser vista como una estructura geométrica en forma de anillos, que se constituye por elipses o niveles sucesivos; mientras que lo dinámico, lo no lineal y la recursividad se convierten en elementos fundamentales dentro de un proceso de aprendizaje no jerárquico. Este modelo se propone fundamentalmente, hacer seguimiento a la evolución de la comprensión que se da en los estudiantes con respecto a un objeto de estudio; aunque es importante tener en cuenta que, según lo propone Lyndon (2000), la comprensión se caracteriza por las interacciones con los demás y con el medio tanto social como didáctico; además de por las diversas situaciones que se dan dentro de la acción pedagógica en lugar de como resultado de la misma; de modo que los estudiantes participan activamente de la construcción y evolución de su comprensión, con base en los elementos y las situaciones propuestos en los problemas matemáticos.

La construcción de la comprensión se origina en el interés y la necesidad de los aprendices, por promover sus estructuras de conocimiento; este modelo se vale de la observación y la descripción de los factores que influencian la relación que se da entre los estudiantes y el objeto de estudio, para así identificar las diferencias y avances en la evolución de la comprensión. En pocas palabras, Pirie y Kieren (1994), se enfocan en la identificación del nivel de comprensión en lugar de en la identificación e introducción de nuevos contenidos. Visto de esta forma, la comprensión de los conceptos matemáticos se ve obstaculizada por el alto nivel de abstracción del contenido, lo cual hace que los estudiantes tiendan a frustrarse; razón por la cual resulta tan pertinente la utilización de un instrumento que permita hacer seguimiento a la evolución de la comprensión, para así determinar hasta qué punto los estudiantes pueden lidiar con cierto nivel de abstracción; siendo este instrumento, la propuesta presentada en el modelo de Pirie y Kieren (1994).

En este orden de ideas, este modelo propone ocho niveles que componen el aspecto descriptivo de la evolución de la comprensión; dotados de características identificadas y analizadas por los mismos creadores; estos ocho niveles describen la evolución de la comprensión matemática con respecto a conceptos y relaciones entre los mismos. Dentro de las características esenciales del modelo se resalta: *folding back*, que podría considerarse como la característica más importante del modelo, la cual tiene relación con el proceso dinámico de redoblar. En uno de sus artículos, Pirie y Kieren (1989) afirman al respecto "El redoblamiento permite a una persona funcionar en un nivel exterior y enfrentarse con un desafío para regresar a un nivel de comprensión más interno con el fin de reconstruir esa comprensión como base para nuevos niveles externos de comprensión" (p. 10). De esta manera, es posible reexaminar la comprensión de un nivel de una forma distinta, por medio de acciones que se adoptaron cuando se trabajó en este nivel (Pirie & Kieren, f*olding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding*, 1991).

Pirie y Kieren (1994), entienden la comprensión como un proceso dinámico que evoluciona de una forma no lineal y que es posible analizar desde la teoría de la recursión trascendente, por medio de los ocho niveles, que son: el conocimiento primitivo, la creación de la imagen, la obtención de la imagen, la observación de las propiedades, la formalización, la observación, la estructuración y la invención. En este sentido, Meel (2003) cita a Pirie y Kieren (1994) quienes definen la comprensión de la siguiente manera:

La comprensión matemática puede ser caracterizada como nivelada, pero de forma no lineal. Es un fenómeno recursivo y la recursión sucede cuando el pensamiento se desplaza entre niveles de sofisticación. En realidad, cada nivel de comprensión está contenido en niveles sucesivos. Cualquier nivel particular depende de las formas y procesos de adentro y, además, está obligado por los de afuera (Meel, 2003, p. 18).

De allí que, Pirie y Kieren (1994) definen dentro de su modelo ocho niveles para la descripción de la evolución de la comprensión de los conceptos matemáticos; dado que estos niveles parten de un punto común y cada nuevo nivel contiene a los anteriores, permitiendo a los estudiantes avanzar o retroceder, dependiendo de sus necesidades, para la resolución de un determinado problema. "*Folding Back*" o Redoblado. De acuerdo con Pirie y Kieren

(1994), el proceso de comprensión puede ser interpretado como la capacidad que se tiene para crear cadenas de conceptos, los cuales no evolucionan necesariamente de manera ascendente; siendo que puede iterarse entre conceptos complejos y elementales, de manera indistinta; esto puede suceder en cada uno de los niveles, lo que hace posible para los estudiantes posicionar su comprensión en un nivel determinado, por medio del actuar y el expresar (Pirie y Kieren 1994). (Figura 2)

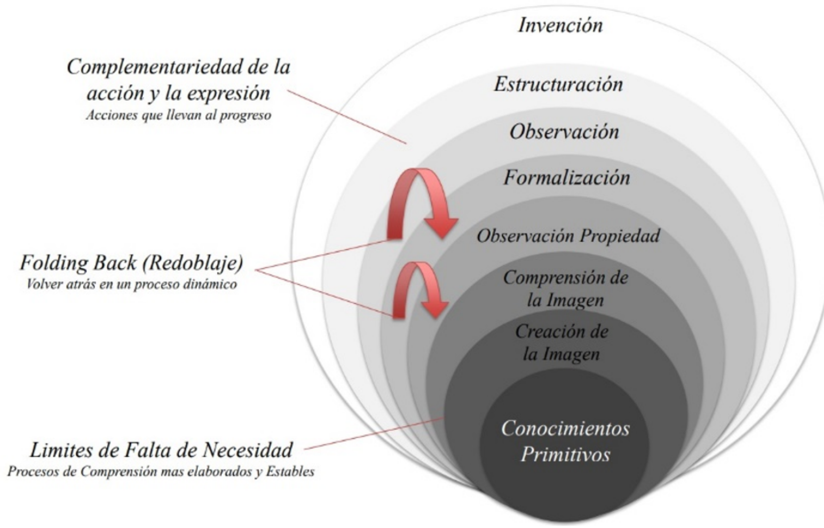

Figura 2. Niveles del Modelo de Pirie y Kieren

Fuente: Pirie y Kieren (1994).

Nivel 1. Conocimiento primitivo: Contempla todos los conocimientos previos e ideas intuitivas con las que cuenta un aprendiz.

Nivel 2. Creación de imagen: Representación mental que se hace sobre la naturaleza del objeto de estudio.

Nivel 3. Comprensión de la imagen: Identificación de características del objeto de estudio con base en la imagen creada.

Nivel 4. Observación de la propiedad: Relacionamiento de las características de las distintas imágenes que se dan del objeto de estudio.

Nivel 5. Formalización: Producción de conceptos a partir de las relaciones establecidas entre las características identificadas.

Nivel 6. Observación: Manifestación de los conceptos en lenguaje formal.

Nivel 7. Estructuración: Relacionamiento del conocimiento alcanzado, con uno de mayor estructuración por medio de algoritmos.

Nivel 8. Invención: El aprendiz da inicio a un nuevo ciclo de evolución de la comprensión, a través de la reflexión sobre los conocimientos que ya posee, para alcanzar nuevos aprendizajes.

En este escenario Meel (2003), plantea que la esencia de la evolución de la comprensión en el modelo de Pirie y Kieren (1994); se basa en un proceso recursivo que exige de un conocimiento mínimo a partir del cual sea posible crear una estructura cimentada sobre teorías validadas. Además, de los ocho niveles de evolución de la comprensión, la teoría contempla características fundamentales como: El folding back, que puede ser entendido como la acción de regresar entre niveles, para recoger información concreta que permita superar determinados obstáculos presentes en el proceso de construcción de nuevo conocimiento.

En este sentido, Ramírez (2011) describe las características del modelo de Pirie y Kieren teniendo en cuenta el folding back; siendo este es el elemento más importante y constituye una característica única para este modelo, la cual consiste en la posibilidad de redoblar o volver hacia atrás. De acuerdo a Lyndon (2000), cuando un aprendiz se encuentra con un obstáculo de aprendizaje debe regresar a un nivel anterior para lograr un cambio cognitivo por medio del cual organizar sus construcciones de manera adecuada para poder abordar el nuevo concepto; gracias a esto es posible garantizar la efectividad de la comprensión, dado que con el regreso a un nivel interior, el aprendiz puede reconstruir la comprensión de un concepto o recuperar aquellos elementos que si bien no fueron de utilidad en los niveles interiores, ahora son requeridos para la superación de los niveles exteriores (Londoño et al., 2013).

Cuando un aprendiz se encuentra en los límites de la vecindad entre niveles, es porque ha alcanzado progresos cualitativos en su comprensión, lo que implica que puede lidiar con mayores niveles de sofisticación y complejidad respecto al objeto de estudio; aunque esto no significa que el mismo pueda prescindir completamente del *folding back* (Londoño et al., 2013). La complementariedad de la acción y la expresión, es otro atributo característico del modelo, que se manifiesta en todos los niveles a excepción del último y se refiere a que los estudiantes de los niveles internos deben mostrar primero por medio de acciones y luego por medio de la expresión, los progresos alcanzados en sus respectivos niveles (Londoño et al., 2013).

El uso del modelo como fundamento teórico resulta pertinente gracias a sus posibilidades cognitivas, didácticas y metodológicas; de modo que se toman los tres primeros niveles de desarrollo de la comprensión dadas las descripciones que implican y las posibilidades que ofrecen para la aplicación de algunos sistemas de representación semiótica. Por otro lado, los ocho niveles analizados por Pirie y Kieren (1994), se tienen en consideración dentro de la teoría formulada por Anna Sfard (1991), la cual busca permitir la realización de una observación global sobre los avances cognitivos de los estudiantes de manera rápida; lo cual se propone lograr por medio de la creación de dos bloques en donde los cuatro primeros corresponden a la descripción de la concepción operacional y los demás a la estructurar; para que después se proceda a estudiar o describir las debilidades identificadas.

Reflexiones y Discusiones finales

Este estudio aporta a la comprensión matemática, criterios que permitan determinar el marco teórico más conveniente a emplear, en concordancia con las características del estudio planteado; de este modo, se ha determinado con base en los elementos postulados, las características y la gradación, que la Teoría de Pirie y Kieren (1991), resultan la más adecuada para un estudio de análisis de los posibles momentos de comprensión a través de los retrocesos y avances en el razonamiento, la exploración de las actuaciones y las declaraciones de los participantes. Gracias a la fundamentación teórica seleccionada es posible apreciar que el problema de investigación se debe a la pérdida del proceso geométrico cuando se realiza la construcción de lo trigonométrico. Ahora bien, a pesar de que las razones trigonométricas demuestran su utilidad en la solución de problemas, no garantizan el desarrollo de un pensamiento trigonométrico ante el manejo del triángulo, sus elementos y las relaciones entre ellos.

Por ende, el proceso de formación o construcción de los conceptos matemáticos dentro del ciclo de educación básica no trascurre de la misma forma a lo largo de los distintos niveles educativos, dado que esto depende significativamente de la edad y el nivel de desarrollo que han alcanzado los estudiantes en cada caso. Por esta razón resulta posible identificar y determinar distintas etapas en el proceso; dado que los conceptos matemáticos estudiados son formados progresivamente, ampliados y profundizados mientras se atraviesa por cada uno de los niveles educativos, en cada uno de los cuales es posible hallar nuevas instancias conceptuales y establecer relaciones con otros conceptos del mismo sistema, permitiendo de este modo la identificación de las mencionadas etapas o niveles en la formación.

Dentro de los marcos teóricos sobre comprensión matemática es posible afirmar que el modelo de Pirie y Kieren, sobre crecimiento de la comprensión matemática, junto a la teoría APOE de Dubinky (1991), contemplan las características más importantes del tema en cuestión. De acuerdo con Pirie y Kieren (1994), la comprensión es un proceso conectivo de varios estratos, no lineal y recursivo con características fractales; lo que significa que el desarrollo de la comprensión implica la construcción y reorganización de las estructuras de conocimiento de una persona.

La transición de un estrato a otro dentro del proceso de comprensión, resulta de la generalización, superando el nivel previo y la reconstrucción de la comprensión de los estratos más bajos. Gracias a la construcción de la comprensión es posible examinar las conexiones construidas entre las imágenes asociadas a un concepto, la ubicación de las conexiones faltantes, la identificación de aquellas que son incorrectas o parciales y la reorganización de las mismas en una estructura tanto estable como consistente.

Por su parte Dubinsky (1991), señala que la comprensión debe ser enlazada con el desarrollo del esquema, lo cual requiere de diversas construcciones especificadas por la abstracción reflexiva; lo cual sugiere que la comprensión es un proceso continuo, aunque no lineal en el que se involucran los esquemas de construcción de mayor elaboración que fusionan acciones en el proceso, encapsulándolo en objetos, a partir de los cuales se presentan más acciones. El esquema se encarga de organizar estas acciones, procesos, objetos y esquemas subordinados en la estructura, la cual trasciende sus componentes y proporciona significado al concepto.

Sin embargo, dentro del discurso trigonométrico escolar, la semejanza es una condición inicial sobre la que se ubica el tema; de modo que la construcción geométrica resulta innecesaria, dado que la actividad matemática se concentra en la operación aritmética para la obtención de los valores faltantes, consolidando el fenómeno de aritmetización de la trigonometría. De igual manera, tal como lo señala Rueda (2012), El aprendizaje de las razones trigonométricas supone restricciones desde lo didáctico y lo curricular, dado que muchos investigadores señalan que se suelen presentar problemas en la apropiación de este concepto, por factores como la tendencia a la introducción de los mismos en la figura del triángulo rectángulo y la finalización en el estudio del círculo unitario o viceversa.

Conclusiones

La enseñanza de las matemáticas como un proceso estático e inerte hace que las mismas pierdan sentido una vez son aplicadas fueran del contexto del aula; haciendo que los estudiantes desarrollen apatía ante estos conocimientos considerándolos irrelevantes dentro de su contexto social e histórico. Por ello, para llevar a cabo la educación en las matemáticas, es preciso tener en cuenta el contexto cultural e histórico específicos de los estudiantes; además de reconocer la necesidad de revisar las estrategias y los contenidos empleados, para comprobar que los mismos responde a las expectativas y necesidades de la sociedad; además de que dotan a los estudiantes de la capacidad para validar, filtrar y tomar decisiones de forma crítica e independiente.

En cuanto a los niveles de comprensión del contenido y el aprendizaje de la matemática, resulta indispensable la habilidad de comprensión lector y la capacidad de operacionalización de los entes matemáticos contemplados en el programa. La enseñanza de las matemáticas debe incluir aspectos interdisciplinares que permitan apreciar la aplicabilidad de esta disciplina en otros contextos ajenos al ideal; además de que se debe aumentar progresivamente la dificultad de los problemas a la vez que se fomenta la integración de los contenidos matemáticos del programa.

La realización de este trabajo investigativo nos ha permitido reflexionar sobre el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas; permitiendo asumir una posición mucho más crítica con respecto a los lineamientos y estándares; además de reconocer lo dispendiosa que puede resultar la tarea de desarrollar el pensamiento matemático. De este modo, resulta evidente la necesidad de fomentar el desarrollo de competencias como la resolución de problemas y la capacidad de representar objetos matemáticos, en lugar de solamente enseñar contenidos.

Para culminar, se deben resaltar las ventajas que supone el modelo de Pirie y Kieren, en la visibilización y promoción de la evolución de la comprensión de los conceptos matemáticos; gracias principalmente a las características de esta teoría que permiten la movilización cognitiva y el estudio del papel que juegan las diversas representaciones en el proceso de comprensión de objetos y contenidos. Así mismo, gracias a este modelo, es posible reconocer la acción y la expresión que asumen los estudiantes, con el objetivo de comunicar, razonar y describir con sus propias palabras, tanto las asociaciones como las relaciones que se encuentran en la capacidad de establecer por si mismos.

Referencias

Arias, J., & Becerra, M. (2015). *La comprensión del concepto de límite de una función en un punto en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. Antioquia: Universidad de Antioquia.

Bardin, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la enseñanza de las matemáticas. *Investigación en Matemáticas*, 7(2), 33-11.

Brown, S. (2005). *The trigonometric connections: Students' understanding of sine and cosine*. Illinois: Illinois State University.

Byers, P. (2010). Investigating trigonometric representations in the transition to college mathematics. *College Quarterly*, 13(2), 1-10.

Cerda, H. (2011). *Los elementos de la investigación cómo reconocerlos, diseñarlos y construirlos*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Creswell, J. (2013). *Qualitative Inquiry and Research Design. Choosing among Five Traditions*. California: Sage.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Gómez, C., & Okuda, M. (2018). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, 34(1), 118-124. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=80628403009

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2016). *Metodología de la investigación*. México D.F., México: McGraw Hill.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla: Alfar.

Londoño, D., Villa, D., & Morales, S. (2013). *Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del modelo de Pirie y Kieren*. Medellín: Universidad de Medellín. https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/76436178/Londo_C3_B1o2013Comprensi_

C3_B3n-libre.pdf?1639606919=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DComprension_del_concepto_de_la_derivada.pdf&Expires=1683930703&Signature=KiIrwPg6L63h2B~EN1-ksaTdnU1Dek

Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes, en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Antioquia: Universidad de Antioquia.

Lyndon, S. (2000). The Role of Collecting in the Growth of Mathematical Understanding. *Mathematics Education Research Journal*, 12(2), 127-146.

Martín, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio*. Universidad de Granada: Universidad de Granada.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime*, 6(3), 221-271.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica*. Mexico D.F: Instituto Politécnico Nacional.

Murillo, A. (2013). *Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grados noveno y once de los colegios públicos de La Virginia*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira. https://repositorio.utp.edu.co/server/api/core/bitstreams/4d367ed7-b8ce-4bcd-a17b-67d8172dd28f/content

Ñaupas, H., Mejía, E., Novoa, E., & Villagomez, A. (2014). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis*. Bogotá , Colombia: Ediciones de la U.

Palella, S., & Martins, F. (2010). *Metodología de la Investigación Cuantitativa.* Caracas: FEDUPEL.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics,* 9(3), 7-11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1991). *Folding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding.* Assissi, Italy: Fifteenth Meeting of the Psychology of Mathematics Education Conference.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 165-190.

Rendón, R. (2011). *La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kiere.* Antioquia: Universidad de Antioquia.

Rendon, R. (2011). *La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Riba, C. (2017). *El análisis de contenido en perspectiva cualitativa*. UOC, Universitat Oberta de Catalunya.

Rueda, G. (2012). *Aproximación a la enseñanza de las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas en el grado décimo.* Santiago de Cali: Universidad del Valle. https://core.ac.uk/download/pdf/157765342.pdf

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele.* Antioquia: Universidad de Antioquia.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational*

Studies in Mathematics(22), 1-36.

Sierpinska, A. (1992). *The notion of function. The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* . EEUU: Mathematical Association of America.

Spink, P. (2007). Replanteando la investigación de campo: relatos y lugares. Fermentum. *Revista Venezolana de Sociología y Antropología*, 17(50), 561-574. https://doi.org/https://www.redalyc.org/pdf/705/70505006.pdf

Taylor, S. y R.C. Bogdan (1989). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Paidós, Barcelona.

Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the earth. The early history of trigonometry.* New Jersey, USA: : Princeton University Press.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A theory of mathematics educalion*. Londres: Academic Press.

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Revista Uniciencia,* 27(1), 74-94.

Villa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada, un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.* Antioquia: Universidad de Antioquia.

Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher,* 17(3), 91-112.

Zapata, S., & Sucerquia, E. (2009). *Módulo de aprendizaje para la comprensión del conceptos de serie de términos positivos*. Antioquia: Universidad de Antioquia.