

Estrategias basadas en la caja de polinomios que disminuyen dificultades en el aprendizaje del proceso de factorización de polinomios con coeficientes enteros

Strategies based on the box of polynomials that reduce difficulties in learning the factorization process of polynomials with integer coefficients

Carlos Andrés Montenegro-Tobar^{a*}, David Armando Solarte-Chincha^b, Oscar Fernando Soto-Agreda^c

^{a*}Especialista en Alta Gerencia, cmontenegrot@udenar.edu.co, <https://orcid.org/0000-0002-2993-6510>, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

^bEspecialista en Pedagogía de la Recreación Ecológica, davidarmandosolarte@udenar.edu.co, <https://orcid.org/0000-0003-0252-7802>, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

^cMagíster en Modelos de Enseñanza Problemática, fsoto@udenar.edu.co, <https://orcid.org/0009-0000-1234-5450>, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

Forma de citar: Montenegro-Tobar, C. A., Solarte-Chincha, D. A., y Soto-Agreda, O. F. (2023). Estrategias basadas en la caja de polinomios que disminuyen dificultades en el aprendizaje del proceso de factorización de polinomios con coeficientes enteros. *Eco Matemático*, 14 (2), 52-66. <https://doi.org/10.22463/17948231.4088>

Recepción: Febrero 9, 2023

Aprobación: Mayo 26, 2023.

Palabras clave

Dificultades,
polinomios,
estrategias,
factorización.

Resumen: La transición de la aritmética al álgebra acarrea dificultades en los estudiantes debido al cambio en el nivel de abstracción superior que tiene el álgebra respecto a la aritmética, ya que se encuentran con conceptos donde deben aplicar conocimientos previos de diferente índole y es aquí donde el estudiante se enfrenta a diversas situaciones de inseguridad, desconfianza, temor asimismo y a lo desconocido. El objetivo de la investigación fue aportar elementos de reflexión para el aprendizaje de la factorización mediada por el uso de la caja de polinomios como herramienta didáctica. La metodología se enmarcó en el enfoque cualitativo, empleando un diseño metodológico de investigación acción, utilizando técnicas como cuestionarios y observación para identificar las dificultades en la resolución de ejercicios de factorización en estudiantes de noveno grado, se diseñaron talleres centrados en la herramienta caja de polinomios para abordar la factorización de manera innovadora y se evaluó finalmente con un postest. Los resultados de la investigación indicaron que las dificultades más comunes de los estudiantes radicaban en la simplificación de términos, la identificación de factores comunes y la aplicación de propiedades de la factorización, lo que a menudo conducía a respuestas incorrectas. Los hallazgos obtenidos en cada etapa de la estrategia didáctica reflejaron el impacto positivo de la caja de polinomios en el proceso de aprendizaje, desde la familiarización con la herramienta hasta la aplicación de procedimientos algebraico

*Autor para correspondencia: cmontenegrot@udenar.edu.co

<https://doi.org/10.22463/17948231.4088>

Keywords

Difficulties,
polynomials,
strategies,
factorization.

Abstract: The transition from arithmetic to algebra causes difficulties in students due to the change in the higher level of abstraction that algebra has with respect to arithmetic, since they encounter concepts where they must apply previous knowledge of a different nature and it is here where the student He faces various situations of insecurity, mistrust, fear, and the unknown. The objective of the research was to provide elements of reflection for the learning of factorization mediated by the use of the box of polynomials as a didactic tool. The methodology was framed in the qualitative approach, using an action research methodological design, using techniques such as questionnaires and observation to identify difficulties in solving factoring exercises in ninth grade students, workshops focused on the polynomial box tool were designed. to approach factoring in an innovative way and was finally evaluated with a post-test. The results of the investigation indicated that the most common difficulties of the students were in the simplification of terms, the identification of common factors and the application of factoring properties, which often led to incorrect answers. The findings obtained in each stage of the didactic strategy reflected the positive impact of the box of polynomials in the learning process, from familiarization with the tool to the application of algebraic-geometric procedures, it was observed how the students showed an improvement in their understanding and skills in factoring polynomials, concluding that technological tools are valuable to improve the teaching and learning of abstract mathematical concepts.

Introducción

En el proceso de transición desde la aritmética hasta el álgebra, se observa que ciertos estudiantes enfrentan obstáculos que van más allá de las operaciones numéricas convencionales, los cuales se han interpretado como dificultades en la capacidad de abstracción, especialmente en vista de las características intrínsecas y distintivas del dominio algebraico. En palabras de Barallobres (2017), se argumenta que la naturaleza abstracta de los conceptos y las relaciones algebraicas presentan un desafío cognitivo para los estudiantes, que luchan por trascender el contexto concreto de la aritmética hacia la conceptualización más abstracta que exige el álgebra.

Profundizando en la naturaleza de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, Barallobres (2016) pone de relieve una perspectiva intrigante, se plantea que las luchas de los estudiantes en este ámbito pueden ser entendidas como fallos en los procesos fundamentales que involucran el tratamiento y la manipulación de la información. Los procesos elementales son esenciales para la comprensión y resolución de problemas matemáticos, y los obstáculos presentes pueden

manifestarse como dificultades en la adquisición de conceptos y destrezas matemáticas más avanzadas. Para evitar dificultades inherentes al aprendizaje del álgebra, es necesario que el estudiante tenga buenos fundamentos aritméticos como el conocimiento correcto de los algoritmos de las operaciones básicas, sus propiedades y el uso frecuente que genera la fluidez algorítmica. Así puede afrontar este cambio de nivel de abstracción y superar inconvenientes al generar un ambiente de confianza; optimizando el aprendizaje y su comprensión.

La adquisición temprana del razonamiento algebraico se fundamenta en la capacidad de generalización y el reconocimiento de patrones, como señala Gasco (2017): “Para adquirir el razonamiento algebraico temprano se debe aprender a generalizar, esto es, a identificar patrones y poder reconocer la norma” (p. 4). No obstante, para MacGregor y Stacey (citado en Castro et al., 2017), la sintaxis de las expresiones matemáticas puede ser una fuente de dificultades y errores para los estudiantes. Es relevante destacar que las dificultades en el ámbito algebraico también pueden estar asociadas a la relación entre números conocidos y desconocidos, tal como lo identificaron los estudiantes en un

estudio realizado por Castro et al. (2017), quienes observaron que una de las dificultades radica en la sintaxis que establece esta relación.

Chevallard (citado en Barallobres, 2017) plantea una perspectiva interesante al señalar que el papel de la aritmética como base para el desarrollo del pensamiento algebraico puede limitarse debido a una concepción restringida del álgebra, donde el lenguaje algebraico se emplea principalmente para simbolizar las propiedades familiares de la aritmética. En consonancia con la noción anterior, Leyton y Rojas (2016) enfatizan la relevancia de la factorización en la enseñanza media y cómo su constante uso a lo largo de los diferentes niveles de educación media contribuye al desarrollo de ideas propias en relación con dicho concepto.

Por su parte, Jiménez y Gutiérrez (2017) destacan que la labor del docente en el entorno educativo es un proceso sumamente complejo que involucra una amalgama de elementos, incluyendo sus creencias y concepciones, su formación tanto disciplinaria como pedagógica, y su continua reflexión sobre las acciones que emprende en el aula. Al respecto, Caballero et al. (citados en León et al., 2020) argumentan que las creencias y emociones que los profesores mantienen hacia las matemáticas tienen un impacto profundo en el desempeño académico de los estudiantes, en sus actitudes hacia esta disciplina y en las creencias que ellos mismos desarrollan en relación con las matemáticas. Así mismo, Partido, citado en Jiménez y Gutiérrez (2017) pone de manifiesto que la mente del docente desempeña un papel crítico al definir cómo conceptualiza las matemáticas, cómo las implementa en el aula y cuál es su perspectiva con respecto a la práctica pedagógica que adopta en el entorno educativo.

En consonancia con lo planteado por Giroux et al. (citados en Barallobres, 2016), es frecuente que los educadores adopten la estrategia de simplificar la complejidad de las tareas matemáticas presentadas,

con el objetivo de proporcionar a los estudiantes una vía de acceso más amigable a los conocimientos, lo que puede ser especialmente beneficioso para aquellos que experimentan dificultades en el aprendizaje. Sin embargo, esta estrategia también plantea interrogantes sobre cómo equilibrar la simplificación con la necesidad de desarrollar un dominio sólido de los conceptos matemáticos y las habilidades asociadas.

Es importante enfatizar que, la simplificación de la tarea, en varias ocasiones se realiza sin analizar el impacto que puede acarrear sobre lo que se quiere enseñar y sobre la conceptualización de las nociones matemáticas implicadas (Lemoyne y Lessard, citados en Barallobres, 2017). No obstante, es esencial subrayar que esta estrategia de simplificación puede llevarse a cabo sin una evaluación cuidadosa de cómo podría afectar tanto la enseñanza de los conceptos previstos como la conceptualización profunda de las nociones matemáticas subyacentes. Esta preocupante práctica, como señalan Lemoyne y Lessard (citados en Barallobres, 2017), puede potencialmente limitar la comprensión completa y rigurosa de los contenidos matemáticos y su aplicabilidad en contextos más amplios.

Ahora bien, Castro et al. (2017) señalan que la instrucción y adquisición del álgebra han motivado un conjunto extenso de indagaciones en el dominio de la Didáctica de las Matemáticas, las cuales han expuesto los desafíos que enfrentan los estudiantes en varios contextos, abarcando áreas como la comprensión del símbolo de igualdad, la resolución de problemas verbales, el abordaje de ecuaciones lineales, la identificación de equivalentes en expresiones algebraicas, la aplicación de modelos, entre otros aspectos. Desde esta óptica, Brousseau (citado en Barallobres, 2017) expone que:

Lo que es importante en la construcción del pensamiento matemático es la naturaleza de las interacciones entre los estudiantes y un medio didáctico organizado por el docente (medio que

puede contener o no objetos materiales y no la manipulación en sí misma de objetos materiales. (p. 43)

En este sentido, es fundamental señalar que los modelos didácticos tienen como objetivo central plasmar y comprender las complejas dinámicas que acontecen dentro del aula (Jiménez y Gutiérrez, 2017). Su enfoque se centra en caracterizar y analizar las prácticas educativas que se despliegan en dicho entorno, las cuales pueden considerarse como un entramado de enfoques y acciones habituales que el docente emplea en su interacción con los estudiantes.

En el marco del sistema curricular colombiano, la factorización se introduce en el octavo grado como parte integral del programa de estudios, sin embargo, es una temática que tiende a desvanecerse rápidamente de la memoria de los estudiantes. Tanto es así que, al avanzar a niveles superiores, como en el noveno grado en el cual se llevó a cabo la intervención, los estudiantes a menudo pasan por alto su importancia y no llegan a comprender plenamente su significado. En este contexto, se evidencia que el proceso de aprendizaje relacionado con la factorización carece de relevancia y no logra perdurar en el tiempo, a pesar de su carácter recurrente en los cursos posteriores, como aquellos de trigonometría y cálculo, que forman parte integral de la educación en grados superiores.

En concordancia con lo señalado, el presente artículo es resultado de la investigación desarrollada con estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Marillac ubicada en el municipio de La Plata, departamento del Huila, cuyo propósito central es contribuir significativamente al proceso de enseñanza -aprendizaje de la factorización, para ello se buscó resolver la siguiente pregunta de investigación: ¿Las estrategias utilizadas en el paso de lo tangible a lo simbólico y abstracto minimizan las dificultades que presentan estudiantes de grado noveno en el proceso de factorización de polinomios con coeficientes enteros?

Los objetivos específicos se enfocaron en identificar las dificultades que presentan los estudiantes y explorar cómo la utilización de una herramienta innovadora como la caja de Polinomios puede impactar y facilitar la comprensión de la factorización.

A partir de ello se presenta este artículo que describe la implementación de la herramienta denominada caja de Polinomios, un recurso educativo que ofrece una oportunidad única para promover un enfoque más interactivo y visual en el aprendizaje del tema (Leitón et al., 2018). Esto es posible gracias a que su funcionamiento se basa en un proceso de homogenización que permite representar objetos de diversas dimensiones en un espacio bidimensional, enriqueciendo así la experiencia de aprendizaje. La caja contiene piezas que representan los diferentes términos de un polinomio, las cuales se manipulan y combinan para formar diferentes polinomios, al combinar las piezas los estudiantes pueden visualizar y experimentar de manera concreta el proceso de factorización de polinomios, además, la manipulación de las piezas facilita la transición desde la representación concreta de los polinomios hacia su expresión simbólica algebraica (Soto y Mosquera, 2017).

En la representación geométrica provista por la caja de polinomios el estudiante puede identificar de manera más evidente la dimensión espacial, pues las fichas rectangulares y cuadradas que conforman la caja tienen longitudes y anchos específicos, los cuales representan los coeficientes y exponentes de los términos del polinomio. Por ejemplo, si un rectángulo tiene una longitud de 3 unidades y un ancho de 2 unidades, esto se traduce en la expresión algebraica como $3x^2$, donde 3 es el coeficiente y 2 es el exponente de la variable x . De esta manera, el estudiante puede asociar directamente las dimensiones geométricas de las fichas con los coeficientes y exponentes de los términos algebraicos (Soto y Mosquera, 2017). Además, la posición de las fichas dentro de la caja de polinomios

también proporciona información relevante sobre la variable y los cuadrantes en los que se ubican las fichas representan los signos (positivo o negativo) de los términos del polinomio.

Finalmente, la incorporación de herramientas tecnológicas desempeñó un papel fundamental en esta investigación, demostrando su valioso aporte en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la factorización de polinomios. Particularmente, la caja de polinomios, como recurso educativo tecnológico, resultó ser una pieza clave en la estrategia didáctica implementada pues permitió a los estudiantes transitar de manera fluida entre las representaciones concretas y simbólicas de los conceptos algebraicos, facilitando así su comprensión. Además, el enfoque interactivo y visual que proporcionó la caja de polinomios convirtió el aprendizaje en una experiencia cautivadora y lúdica, fomentando un mayor compromiso y participación por parte de los estudiantes.

Materiales y Métodos

Enfoque y diseño

Esta investigación se enmarca en el paradigma cualitativo, que se caracteriza por ser una metodología sistemática orientada a lograr una comprensión profunda de los fenómenos educativos y sociales (Sandín, 2003), de manera que se emplea un enfoque inmersivo con el fin de capturar las complejidades, contextos y perspectivas que subyacen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización en el ámbito de las matemáticas. A través de la investigación cualitativa, se busca ir más allá de las respuestas superficiales, explorando la diversidad de experiencias y percepciones de los participantes, contribuyendo así a una comprensión más profunda del fenómeno educativo en su conjunto y ofreciendo aportes valiosos para mejorar la práctica pedagógica y desarrollar enfoques de enseñanza más efectivos.

El diseño metodológico corresponde a la Investigación-Acción, debido a que dicho diseño no se limita a observar o analizar pasivamente un fenómeno, sino que busca una participación directa en el proceso de cambio y mejora educativa. De acuerdo con Elliot (2020) la investigación-acción aplicada en el entorno escolar implica el análisis de las acciones y situaciones vividas por los educadores, caracterizadas por ser problemáticas en ciertos aspectos, contingentes en su capacidad de cambio y que demandan respuestas prácticas. Se buscó entonces, no solo identificar los obstáculos concretos que los estudiantes enfrentan al comprender la factorización de polinomios, sino también afrontarlos por medio del diseño de una estrategia didáctica, para el caso, los docentes investigadores se convierten en agentes de cambio que se ocupan de los problemas reales en el aula, trabajando para desarrollar soluciones prácticas que beneficien a los estudiantes.

En general, los resultados mostraron que la utilización de la caja de polinomios como recurso educativo ofreció ventajas significativas para reducir las dificultades en el aprendizaje de la factorización de polinomios. La estrategia implementada demostró ser eficaz para mejorar la comprensión y aplicación de estos conceptos, fomentando el aprendizaje significativo y aumentando la participación y el compromiso de los estudiantes.

Población

Los participantes del estudio son estudiantes de grado noveno pertenecientes a la Institución Educativa Marillac, ubicada en el municipio de La Plata, en el departamento de Huila, en total 13 jóvenes de los cuales 9 son de género femenino y 4 de género masculino, con edades comprendidas entre los 13 y 15 años. La elección de los participantes se basó en criterios de conveniencia, puesto que se trata de un grupo de estudiantes con los que se interactúa de manera continua durante todo el año académico. Es importante destacar que, la institución es de

carácter público y que sus estudiantes provienen en su mayoría de estrato socioeconómicos 0, 1 y 2 de zona urbana del municipio.

En cuanto a las técnicas de recolección de información se utilizó un cuestionario desarrollado por los investigadores, previamente validado por expertos, en donde se indagó los conocimientos previos sobre la factorización de polinomios con coeficientes enteros, lo cual permitió identificar las falencias que presentan los estudiantes involucrados en el estudio. Se aplicó entonces un pretest y un posttest, este último incluyó ejercicios de factorización similares al cuestionario inicial en el que se incluyeron actividades que involucraron la utilización de la caja de polinomios.

Análisis de la información

Una vez se aplica los instrumentos se hace un vaciado en una hoja de cálculo de Excel, que actuó como una matriz al permitir organizar y examinar detalladamente la información obtenida con el fin de garantizar la comprensión de los resultados, en especial frente a los errores presentados por parte de los estudiantes en relación con la factorización de polinomios con coeficientes enteros. La fase de análisis de los resultados del cuestionario fue abordada con un enfoque riguroso y sistemático, inicialmente, se procede a una evaluación cualitativa de las respuestas proporcionadas por los participantes, con el fin de identificar patrones, tendencias y conceptos emergentes sobre las dificultades y percepciones en torno a la factorización de polinomios. Posteriormente, se analiza los resultados de la aplicación de la estrategia pedagógica y de los talleres centrados en la caja de polinomios, describiendo así las actitudes y vivencias a partir de la observación.

Para analizar el impacto del uso de la caja de polinomio se administró un cuestionario final (posttest) que contenía ejercicios de factorización semejantes a los que se presentaron en el

cuestionario inicial, sin embargo, en esta instancia se incorporaron actividades que involucraron el uso de la caja de polinomios, junto con interrogantes abiertos destinados a comprender cómo la utilización de dicha herramienta contribuyó a una mejor comprensión del procedimiento de factorización de polinomios. Finalmente, se examinaron los resultados del posttest sistematizados en una nueva hoja de cálculo de Excel que facilitó la interpretación de las respuestas permitiendo analizar el impacto del uso de la caja de polinomios en el aprendizaje de la factorización.

Resultados

Dificultades en la resolución de ejercicios de factorización de polinomios

En general las dificultades encontradas en la resolución de los ejercicios planteados se relacionan con la simplificación de términos, la identificación de factores comunes y la aplicación de las propiedades de la factorización, las cuales conducen a los estudiantes a resultados incorrectos. Por ejemplo, en una de las preguntas que pretendía identificar las dificultades al aplicar las técnicas de factorización de polinomios para descomponer un monomio en sus factores más simples, la cual se basó en las fallas que presentan los estudiantes en los procesos algebraicos elementales según Barallobres (2016), se presentan errores en la identificación de los factores comunes entre el monomio original y la parte proporcionada de la factorización. Cómo se puede ver en la figura 1, hay muchas debilidades en la manipulación de los exponentes de las variables, en la multiplicación de términos y al realizar la multiplicación entre los factores, aspectos que según Baltazar et al. (2015) se presentan por la falta de interpretación de lo que se pide.

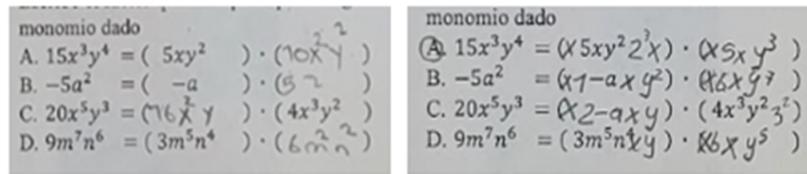


Figura 1. Errores al identificar los factores comunes y al multiplicar

De igual forma, se encontró que los estudiantes cometen errores en la comparación de los términos de un polinomio dado, se confunden en la simplificación y multiplicación de los términos, ignorando ciertos aspectos de la expresión, lo que resulta en respuestas inexactas, de manera que presentan dificultades para identificar los factores comunes en los enunciados, pasando por alto sobre todo los coeficientes, lo cual evidencia las falencias en los conocimientos de las propiedades de la factorización como la distribución de coeficientes o el reconocimiento de términos cuadrados perfectos. Lo anterior se puede apreciar en la Figura 2, en donde se pretendía indagar sobre la identificación correcta de los términos polinómicos, así como la distinción entre coeficientes y variables, aquí los estudiantes tenían que marcar verdadero o falso según el ejemplo y la respuesta correcta era: V,F,V,F.

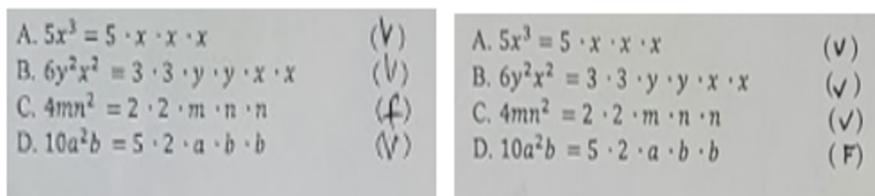


Figura 2. Errores en la comparación, simplificación y multiplicación de los términos del polinomio.

A través de otra de las preguntas del pretest se buscó identificar si los estudiantes comprenden y pueden aplicar correctamente las técnicas de factorización, en particular en el caso de la diferencia de cuadrados, así como evaluar su habilidad para reconocer y manejar los términos y coeficientes en la expresión polinómica. La figura 3, muestra algunos resultados de este ejercicio en donde la respuesta correcta es la D, evidenciando las dificultades para identificar la forma de la diferencia de cuadrados y aplicarla correctamente al polinomio dado. Al factorizar el polinomio, los estudiantes cometen errores al distribuir los términos y los signos correctamente en los factores, por ejemplo, confunden el signo negativo (-16) y lo distribuyen de manera incorrecta en los factores, de manera que tienen grandes dificultades en la simplificación algebraica, el anterior error es denominado por Morales (2017) como mal uso de sustitución numérica.

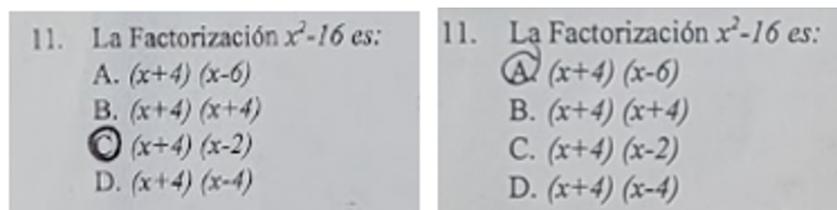


Figura 3. Errores en la manipulación de términos y dificultades en la identificación de factores comunes.

En el cuestionario también se aplicó preguntas abiertas en la que se indagaba sobre la mayor dificultad que encontraron al resolver los ejercicios propuestos, ante ello muchos señalan la dificultad para encontrar

el área de los cuadrados. De igual forma, manifestaron que una de las preguntas que más dificultad les causó fue la que debían escribir el factor que faltaba para que fuera igual al monomio dado, la falta de comprensión sobre el proceso y los pasos necesarios para encontrar el factor que completaría el monomio les dificultó la resolución. Otro aspecto destacado es que los estudiantes no tienen una comprensión sólida de cómo aplicar los pasos correctamente en la resolución de los ejercicios, a menudo, los pasos que emplean no les proporcionan los resultados correctos, lo que indica una falta de habilidad para seleccionar y aplicar las

operaciones adecuadas en el contexto específico de los ejercicios.

Talleres centrados en la Caja de Polinomios

La utilización de la caja de polinomios como recurso educativo ofrece una oportunidad única para promover un enfoque más interactivo y visual en el aprendizaje del tema (Leitón et al., 2018). A través de la creación de talleres y cuestionarios adaptados a este enfoque, se buscó proporcionar a los estudiantes una herramienta didáctica que les permita comprender y aplicar de manera efectiva los conceptos y métodos de factorización de polinomios. Es así como en el diseño de los talleres propuestos se plantearon varios objetivos que buscan potenciar el uso de la caja de polinomios como una herramienta didáctica en el proceso de enseñanza de la factorización de polinomios, los cuales son: 1. Reconocer la caja de polinomios como una herramienta didáctica, 2. Capacitar a los estudiantes en el uso de la versión digital de la caja de polinomios, y 3. Reconocer la factorización como un proceso de simplificación algebraica.

La ejecución de la estrategia se organizó en dos momentos macro: uno denominado exploración y manejo de la caja de polinomios y otro titulado factorización de polinomios con coeficientes enteros utilizando la caja de polinomios. Cada uno de estos momentos contó con 2 jornadas de trabajo de 2 horas, en las que se buscó garantizar un tiempo suficiente para la exposición, la participación y la reflexión, durante estas sesiones, se emplearon metodologías interactivas y participativas para fomentar el compromiso y el aprendizaje activo de los estudiantes.

Los resultados obtenidos en la primera jornada radican en la generación un ambiente de exploración y aprendizaje activo, permitiendo que los estudiantes se familiarizaran con la interfaz y las posibilidades del software POLI 6, un programa gratuito desarrollado por el grupo GESCAS de la Universidad de Nariño (Colombia), que permite representar las operaciones básicas de la suma, resta, multiplicación, división y factorización de polinomios en una variable en el plano cartesiano. Dentro de estos resultados se destaca que los estudiantes lograron comprender de manera más clara y dinámica los conceptos involucrados en la factorización de polinomios al verlos representados visualmente, así mismo el carácter interactivo y manipulable del software permitió que los alumnos exploraran activamente los procesos de factorización, reforzando su comprensión, y la visualización en el plano cartesiano facilitó la identificación de patrones y relaciones entre los coeficientes y términos de los polinomios durante la factorización. Finalmente, el ambiente lúdico y dinámico propiciado por el software aumentó el interés y la motivación de los estudiantes hacia el tema, al tiempo que la retroalimentación inmediata del software sobre los procedimientos realizados favoreció el aprendizaje a través del ensayo y error.

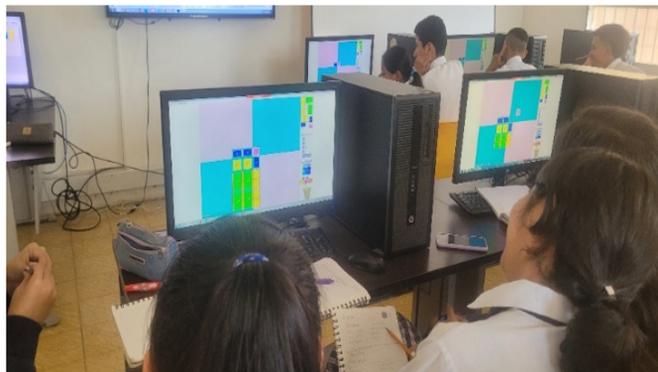


Figura 4. Exploración de la herramienta POLI 6.

En la segunda jornada se llevó a cabo una dinámica diseñada para que los estudiantes profundizaran en el reconocimiento y las diferencias entre las fichas de la caja de polinomios, se hizo énfasis en comprender las características distintivas de los rectángulos y cuadrados que conforman la herramienta, incluyendo las medidas de sus lados y áreas. Para ello se proporcionó una guía de trabajo que presentaba varias figuras geométricas dentro de la caja de polinomios, cada estudiante tenía la tarea de aplicar la fórmula del área y calcular las medidas correspondientes. Dentro de los resultados obtenidos en esta jornada los estudiantes reforzaron sus conocimientos sobre el cálculo de áreas de rectángulos y cuadrados, establecieron conexiones entre las representaciones geométricas y algebraicas de los polinomios e interpretaron las dimensiones de las fichas como los coeficientes y exponentes de los términos de un polinomio.

Después de completar la actividad, se promovió un intercambio de guías para revisión y socialización, fomentando así la colaboración y el aprendizaje mutuo, por tanto, los estudiantes tuvieron la oportunidad de revisar el trabajo de sus compañeros y discutir las diferentes estrategias utilizadas. Los hallazgos de esta etapa del taller encuentran eco en las ideas presentadas por Ricce et al. (2021), quienes enfatizan en la importancia de fomentar el aprendizaje colaborativo en el aula para promover la construcción colectiva del conocimiento, pues la aplicabilidad de enfoques metodológicos que

ponen el énfasis en la colaboración en el aprendizaje conlleva la posibilidad de realizar argumentaciones y autoevaluaciones, tanto por parte de los estudiantes como del docente.



Figura 5. Estudiantes utilizando el tablero del software POLI6

La figura 5 representa otra dinámica en la que se presentaron fichas visuales que representaban términos polinómicos y se pidió a los estudiantes que trabajaran en equipo para trasladar estas fichas al tablero, luego se realizaron preguntas abiertas como: ¿Fue difícil armar el rectángulo? Dentro de las respuestas se tuvo: "Al principio nos costó un poco, porque no estábamos seguros de cómo colocar las fichas correctamente.", "No fue tan difícil, pero tuvimos que pensar en cómo encajar las piezas para formar el rectángulo.", "Algunas piezas tenían coeficientes diferentes y eso complicó un poco, pero una vez que entendimos, fue más fácil". Estas respuestas sugieren que la tarea no solo se trata de una cuestión de dificultad objetiva, sino también de la percepción subjetiva y las estrategias utilizadas por cada estudiante.

Al respecto, López (2009) y Villalobos y García (2021) consideran que es importante reconocer y abordar las concepciones previas de los estudiantes, pues las respuestas ante la tarea del rectángulo demuestran que sus ideas iniciales y estrategias para enfrentar la actividad pueden variar ampliamente. Por su parte, Rojas y Movilla (2018) indican que se debe fomentar la autonomía y el pensamiento crítico de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. Este ejercicio práctico permitió a los

estudiantes poner en práctica sus habilidades de visualización y manipulación de representaciones concretas de polinomios, así se enfrentaron a incertidumbres y dificultades iniciales, fomentando la persistencia y el pensamiento crítico.

En un tercer momento de la estrategia didáctica, el enfoque se centró en que los estudiantes comprendieran el proceso de factorización como una técnica para simplificar y descomponer expresiones algebraicas en términos más simples. Para lograr este objetivo, se implementaron una serie de actividades diseñadas para guiarlos en este proceso de comprensión y aplicación. Inicialmente, se solicitó que analizaran y reconocieran el significado de la palabra "factorizar". Utilizando un video como recurso, se presentó una breve explicación sobre el concepto. Posteriormente, se generó una discusión en clase planteando la pregunta ¿Qué es factorizar? Las reacciones fueron positivas, ya que los estudiantes estuvieron atentos y respondieron con facilidad, demostrando una comprensión inicial del término.

Posteriormente se avanzó a través de ejemplos prácticos donde se mostró cómo se lleva a cabo el proceso de factorización, planteando también diferentes ejercicios en los que se debía identificar los factores correspondientes a expresiones algebraicas. En este punto, algunos estudiantes encontraron dificultades al principio, pero con la orientación adecuada y la interacción con sus compañeros, lograron avanzar y resolverlos con confianza. Los resultados de esta etapa, en la que se involucraron ejemplos prácticos, ejercicios interactivos y el uso del software POLI6, se alinean con las perspectivas de Bozzalla y García (2014), quienes señalan que los contenidos matemáticos deben presentarse de manera relevante y aplicada para estimular el interés y la comprensión de los estudiantes.

La cuarta jornada se enfocó en la aplicación de procedimientos algebraico-geométricos para factorizar polinomios con coeficientes enteros

utilizando la caja de polinomios, aquí los estudiantes fueron guiados a través del proceso de factorización dentro del software POLI 6, aprovechando la funcionalidad de la herramienta para visualizar y manipular los conceptos algebraicos de manera concreta. Una ventaja clave del uso del software es su capacidad para visualizar de manera concreta el proceso de factorización, los estudiantes pudieron ver cómo las fichas se ubicaban en los cuadrantes correspondientes, siguiendo reglas específicas. La representación gráfica en forma de rectángulo en la caja de polinomios ayudó a consolidar la comprensión del proceso algebraico geométrico de factorización.

En la representación geométrica provista por la caja de polinomios, la variable que el estudiante puede identificar de manera más evidente es la dimensión espacial. Las fichas rectangulares y cuadradas que conforman la caja tienen longitudes y anchos específicos como ya se había mencionado anteriormente, los cuales representan los coeficientes y exponentes de los términos del polinomio.

Los resultados obtenidos en esta etapa, donde se aplican procedimientos algebraicos utilizando la caja de polinomios, respaldan la noción de Marcilla (2013) en el sentido de que las herramientas tecnológicas pueden facilitar la comprensión de conceptos matemáticos abstractos al permitir una representación visual y manipulativa de los mismos, evidenciando las ventajas de integrar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Impacto del uso de la caja de polinomios

Los resultados del postest indican avances favorables en los estudiantes, por ejemplo en el cálculo de las áreas (ver figura 6) se encontró que tan solo 1 estudiante contestó de manera incorrecta, en contraste con los resultados anteriores en donde tan solo 5 estudiantes contestaron correctamente a

una pregunta similar que incluso tenía opciones de respuesta, determinando así que la representación visual y la interactividad proporcionada por la caja de polinomios de Soto y Mosquera (2017) pueden haber contribuido a una mayor claridad conceptual, además, el software facilitó en gran medida la visualización y manipulación de las figuras, lo que a su vez ayudó a los estudiantes a comprender mejor cómo se relaciona el cálculo de áreas con los polinomios.

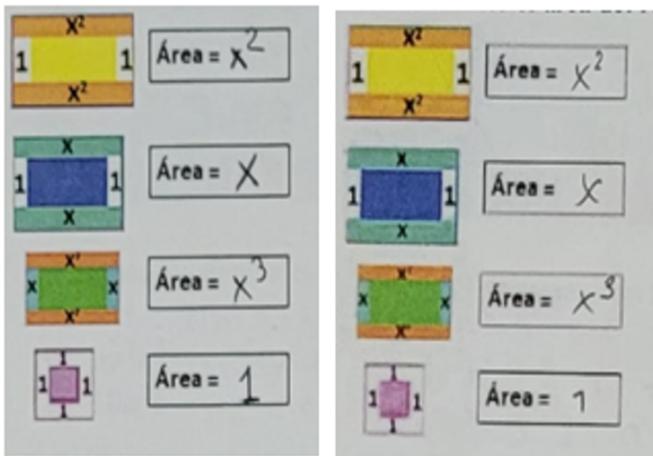


Figura 6. Ejercicios de cálculos de áreas desarrollados correctamente

La baja cantidad de respuestas incorrectas en otra de las preguntas relacionadas con el uso de signos sugiere que la mayoría de los estudiantes han logrado una comprensión efectiva de cómo los signos en los cuadrantes de la caja de polinomios afectan el proceso de factorización, de manera que la interacción con las fichas y la visualización de su colocación en los cuadrantes proporcionó a los estudiantes una experiencia tangible que fortaleció su comprensión (ver figura 7). El pretest también buscó evaluar la capacidad para relacionar la representación geométrica de un polinomio con su expresión algebraica correspondiente y la baja proporción de respuestas incorrectas sugiere que la mayoría de los estudiantes han desarrollado una comprensión efectiva de cómo traducir la representación visual de un polinomio en la caja de polinomios en su expresión algebraica equivalente.

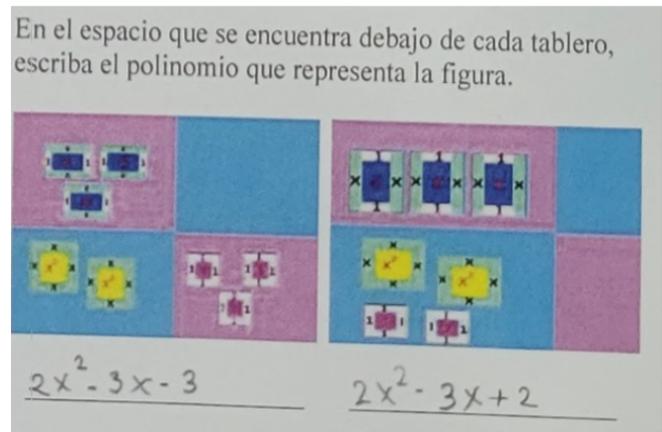


Figura 7. Pregunta No. 4 del postest

En otras preguntas se solicitó factorizar algunos monomios, encontrando que solo 2 de los 13 estudiantes contestaron de forma incorrecta, resultado que es alentador y resalta el impacto positivo de la estrategia basada en la caja de polinomios, pues el hecho de que la gran mayoría de los estudiantes haya respondido correctamente demuestra que han aplicado eficazmente sus habilidades para identificar factores comunes, cuadrados perfectos y otros patrones de factorización, lo que sugiere que han adquirido una comprensión sólida de cómo abordar y resolver ejercicios de factorización.

Por otra parte, el pretest también contó con preguntas abiertas que buscaban analizar cómo la caja de polinomios ayudó en el proceso de aprendizaje de la factorización, las respuestas proporcionadas revelan una serie de beneficios clave. En primer lugar, la herramienta parece haber impactado positivamente en la eficiencia del proceso con la mayoría de los participantes, notando que les permitió realizar los cálculos de una forma más rápida y ágil. La aceleración podría atribuirse a la naturaleza visual y manipulativa de la herramienta, que posiblemente permitió identificar patrones y realizar operaciones de manera más fluida, además, la caja de polinomios se destacó como una herramienta de organización, lo que indica que los estudiantes pudieron entender mejor cómo estructurar y abordar la factorización de manera secuencial y lógica.

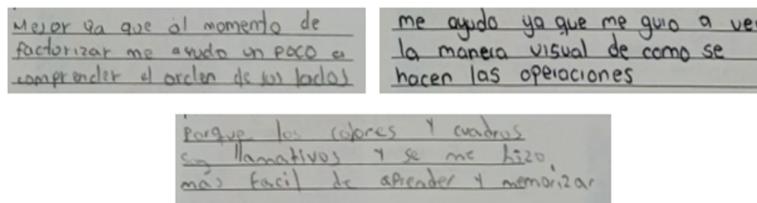


Figura 8. Respuestas a pregunta ¿Cómo le ayudó la caja de polinomios?

La mejora en la visualización también fue un punto sobresaliente, pues los participantes expresaron que la herramienta les brindó una representación concreta y tangible de los procesos abstractos de factorización, lo que les permitió comprender visualmente cómo se desarrollan las operaciones. Además, se mencionó que la herramienta facilitó la comprensión, particularmente en la interpretación de signos y términos, la presencia de colores y cuadros en la caja de polinomios se destacó como un recurso que aporta claridad a los cálculos y reduce la posibilidad de cometer errores en el proceso de factorización. Las apreciaciones de los estudiantes están en consonancia con lo que sostienen Soto y Mosquera (2017) en su trabajo, al afirmar que las operaciones con polinomios utilizando la caja se convierten en algoritmos divertidos que traducen el conocimiento en saberes significativos y derivan en procedimientos de mayor riqueza en comparación con los métodos tradicionales.

De igual forma, Villalobos y García (2021) hacen hincapié en que el uso de herramientas tecnológicas son un gran acierto, puesto que integran los materiales didácticos que facilitan el aprendizaje y sin el apoyo didáctico de este tipo de herramientas los estudiantes enfrentarían mayores dificultades para visualizar de manera concreta el proceso de factorización. Al carecer de una representación tangible y manipulable, tendrían que recurrir únicamente a las expresiones simbólicas y algebraicas, las cuales, como menciona Barallobres (2017), presentan un desafío cognitivo debido a su naturaleza abstracta.

Discusión

Los hallazgos de esta investigación respaldan las ideas de Leitón et al. (2018) y Marcilla (2013) sobre el potencial de herramientas didácticas visuales e interactivas, como la caja de polinomios, para facilitar la comprensión de conceptos algebraicos abstractos. En este sentido, la visualización concreta del proceso de factorización resultó ser un factor clave para promover la comprensión de este concepto algebraico abstracto en los estudiantes, puesto que al representar visualmente los pasos y permitir la manipulación de los componentes involucrados, se superaron barreras cognitivas asociadas a la naturaleza abstracta del álgebra, como plantea Barallobres (2017). Esta representación visual tangible contribuyó a fortalecer las conexiones entre las representaciones geométricas y algebraicas, alineándose con la perspectiva de Marcilla (2013) sobre el potencial de las herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión mediante visualizaciones de conceptos matemáticos abstractos. Además, brindó una estructura organizada y lógica para abordar la factorización, aspecto valorado por los estudiantes al resaltar la mejora en la visualización y comprensión de signos y términos.

Ahora bien, los resultados favorables en el postest, como la mejora en el cálculo de áreas y la baja tasa de respuestas incorrectas al relacionar representaciones geométricas con expresiones algebraicas, sugieren que la naturaleza manipulativa y visual de la caja de polinomios contribuyó a una mayor claridad conceptual en los estudiantes. Además, el trabajo colaborativo promovido a través de actividades grupales y la revisión de guías de

trabajo concuerda con los planteamientos de Ricce et al. (2021) sobre la importancia del aprendizaje colaborativo en el aula para la construcción colectiva del conocimiento. Las diversas respuestas y estrategias empleadas por los estudiantes al enfrentar tareas desafiantes, como la tarea del rectángulo con fichas polinómicas, resaltan la importancia de reconocer y abordar sus concepciones previas, tal como enfatizan López (2009) y Villalobos y García (2021).

Los resultados alentadores en preguntas de factorización de monomios, donde la gran mayoría de estudiantes aplicó eficazmente sus habilidades para identificar patrones de factorización, sugieren que la estrategia didáctica promovió el desarrollo de la autonomía y el pensamiento crítico en la resolución de problemas matemáticos, aspectos destacados por Rojas y Movilla (2018). Así mismo, el enfoque adoptado en la implementación de la estrategia, que incluyó ejemplos prácticos, ejercicios interactivos y el uso del software POLI6, se alinea con las recomendaciones de Bozzalla y García (2014) sobre presentar los contenidos matemáticos de manera relevante y aplicada para estimular el interés y la comprensión de los estudiantes. Finalmente, los comentarios de los estudiantes resaltando beneficios como la mejora en la visualización, la comprensión de signos y términos, y la organización del proceso de factorización respaldan la noción de Marcilla (2013) sobre el potencial de las herramientas tecnológicas para representar visualmente conceptos matemáticos abstractos y facilitar su comprensión.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en relación con los errores matemáticos demuestran las dificultades sustanciales que los estudiantes enfrentan al comprender y aplicar la factorización de polinomios, abarcando áreas clave como la simplificación de términos, la identificación de factores comunes y la aplicación de las propiedades de la factorización. Estas dificultades no solo reflejan un problema en la comprensión conceptual, sino también una carencia

en las habilidades de simplificación algebraica, lo que resulta fundamental para abordar la factorización de manera precisa.

En respuesta a la pregunta de investigación la estrategia didáctica demostró ser una herramienta eficaz para mejorar la comprensión y aplicación de la factorización de polinomios, los momentos secuenciales permitieron desarrollar habilidades metacognitivas, adaptar enfoques y estrategias, y aplicar conceptos matemáticos en situaciones reales que ayudaron a minimizar las dificultades encontradas. La estrategia logró fomentar un aprendizaje más profundo y significativo de la factorización de polinomios a través de la interacción con la caja de polinomios y el uso de tecnología educativa, además, su uso generó un aumento en el nivel de participación y compromiso de los estudiantes durante las sesiones de aprendizaje.

El hecho de que la mayoría de los estudiantes lograra abordar de manera exitosa las diferentes preguntas del postest indica que la estrategia implementada ha tenido un impacto positivo en su capacidad para aplicar los conceptos y técnicas aprendidos. Las respuestas correctas, especialmente aquellas relacionadas con la identificación de términos y factores, la relación entre la representación gráfica y la expresión algebraica, y la aplicación adecuada de las reglas de factorización, reflejan una comprensión más profunda y sólida de los contenidos.

Los resultados de esta investigación indican claramente que la utilización de la caja de polinomios como recurso educativo ofrece ventajas significativas en la reducción de las dificultades en el aprendizaje del proceso de factorización de polinomios con coeficientes enteros. La aproximación interactiva y visual proporcionada por esta herramienta demuestra ser efectiva para mejorar la comprensión, el desempeño y la motivación de los estudiantes en este contexto específico de aprendizaje matemático.

Referencias

- Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H., & Amaya, T. (2015). Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factorizar polinomios. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Universidad de Sucre. (Colombia)
- Barallobres, G. (2016). Diferentes interpretaciones de las dificultades de aprendizaje en matemática. *Educación Matemática*, 28(1), 39–68.
- Barallobres, G. (2017). Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 27–47.
- Bozzalla, A & García, S. (2014). Espacios de reflexión sobre la enseñanza de la matemática en la escuela media. Análisis gráfico como puerta de entrada hacia el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 . En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 1031-1039.
- Castro, W., Martínez, J & Pino, L. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT. Journal of Research in Mathematics Education*, 6(2), 164–191.
- Ceballos, F. (2009). El informe de investigación con estudio de casos. *Revista Internacional de Investigación En Educación*, 1(2), 413–423.
- Gasco, J. (2017). La resolución de problemas aritmético - algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 20(2), 1–28.
- Jiménez, A & Gutiérrez, A. (2017). Realidades escolares en las clases de matemáticas. *Educación Matemática*, 29(3), 109–129.
- León, C., Solano, N., Gómez, A & Fernández, R. (2020). Dominio afectivo y prácticas docentes en Educación Matemática : un estudio exploratorio en maestros. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 58, 129–149.
- Leyton, A & Rojas, C. (2016). Concepciones presentes sobre la factorización en estudiantes de 15 a 16 años. *RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática*, 10(1), 79-84.
- López, J. (2009). La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje de nuevos contenidos. *Innovación y Experiencias educativas*. 1-14.
- Marcilla, C. (2013). *Las TIC en la didáctica de las matemáticas*. [Tesis Maestría]. Universidad de Burgos.
- Morales, S. (2017). *Errores que presentan estudiantes de undécimo, en el uso del lenguaje algebraico*. [Tesis pregrado]. Universidad Pedagógica Nacional.
- Ricce, C., Díaz, B & López, O. (2021) El aprendizaje colaborativo en la enseñanza de las matemáticas: revisión sistemática. *Acción y Reflexión Educativa*. 47.
- Rojas, B. & Movilla, M. (2018). *La metodología resolución de problemas matemáticos como estrategia para el desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes de grado 11° de la Institución Educativa Departamental Silvia Cotes de Biswell*. [Tesis Maestría]. Universidad de la Costa - CUC. Barranquilla
- Sandín, E. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación*. Fundamentos y Tradiciones. Madrid.

Mc Graw and Hill Interamericana de España (pp.258). *Revista de Pedagogía*, 26(77), 48-58.

Soto, F & Mosquera, S. (2017). La caja de polinomios. Universidad de Nariño – Colombia. VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.

Villalobos, M & García, M. (2021). El aprendizaje significativo de contenidos matemáticos para nivel medio superior en escenarios educativos virtuales. *Educación Creadora*. 1. 43-53.