Eco matemático ISSN: 1794-8231 (Impreso), E-ISSN: 2462-8794 (En línea) Volumen 14 (1) Enero-Junio de 2023, páginas 57-70

Eco Matemático
Scientific Journal of Matematics

Impacto de la modelación con integral definida en la determinación del nivel de líquido en un tanque: Una aplicación práctica en estudiantes de ingeniería

Impact of Definite Integral Modeling on Liquid Level Determination in a Tank: A Practical Application with Engineering Students

Francisco Javier Córdoba-Gómez[a], Fermín Álvarez-Macea[b], Cesar Augusto Hernández-Suárez[c]

[a]Magíster en Matemática Educativa, franciscocordoba@itm.edu.co, https://orcid.org/0000-0002-3371-3643, Docente Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia.
[b]Doctorando en Ciencias de la Educación, fermin.alvarez@udea.edu.co, https://orcid.org/0000-0002-2451-9144, Docente Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
[c*]Doctorando en Ciencias de la Educación, cesaraugusto@ufps.edu.co, https://orcid.org/0000-0002-7974-5560, Docente investigador de la Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia.

Forma de citar: Córdoba-Gómez, F. J., Álvarez-Macea, F., y Hernández Suárez, C. A. (2023). Impacto de la modelación con integral definida en la determinación del nivel de líquido en un tanque: Una aplicación práctica en estudiantes de ingeniería. *Eco Matemático*, 14 (1). 57-70 https://doi.org/10.22463/17948231.4405

Recepción: Agosto 29, 2022
Aprobación: Diciembre 18, 2022

Palabras clave

Modelación Matemática, Contexto De Aprendizaje, Realidad, Resignificación.

Resumen: El estudio se centró en cómo la modelación potencia las interacciones en las clases de matemáticas, específicamente al usar la integral definida para estimar el nivel de líquido en un tanque entre estudiantes de ingeniería en cálculo integral. Se utilizó una metodología cualitativa descriptiva e interpretativa, con una perspectiva fenomenológica en un estudio de caso. Los hallazgos indicaron una fuerte concordancia entre los datos reales y los modelados. Esta alineación demuestra que integrar estos métodos en la enseñanza motiva y compromete más a los estudiantes, enriqueciendo sus interacciones y profundizando su comprensión sobre la aplicación de la integral definida en contextos prácticos. Este hallazgo subraya la relevancia de incluir enfoques prácticos y escenarios reales en la didáctica matemática, buscando fomentar una comprensión profunda y un mayor interés estudiantil.

*Autor para correspondencia cesaraugusto@ufps.edu.co

https://doi.org/10.22463/17948231.4405

Keywords

Mathematical Modeling, Learning Context, Reality, Mathematical Modeling, Resignification.

Abstract: The study focused on how modeling enhances interactions in mathematics classes, specifically by using the definite integral to estimate the liquid level in a tank among engineering students in integral calculus. A descriptive and interpretive qualitative methodology was employed, with a phenomenological perspective in a case study. The findings indicated strong agreement between real and modeled data. This alignment demonstrates that integrating these methods in teaching motivates and engages students more, enriching their interactions and deepening their understanding of the application of the definite integral in practical contexts. This finding underscores the relevance of including practical approaches and real-world scenarios in mathematics education, aiming to foster a profound understanding and increased student interest.

Introducción

Es necesario encontrar formas de involucrarse y optimizar los procesos de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas. El objetivo es lograr que el conocimiento matemático escolar sea significativo y funcional. La modelación, que combina los términos "modelización" y "educación" (Álvarez-Macea & Costa), se presenta como una herramienta para integrar las matemáticas con la realidad, transformándola y transformando al estudiante que aprende. Esto conlleva a una continua reconstrucción y enriquecimiento de significados (Córdoba, 2014). Se resalta la necesidad de conectar el conocimiento matemático con otros campos del conocimiento, siendo esencial en la formación de ingenieros (Plaza, 2015; Romo-Vázquez, 2015). Conforme a Salett y Hein (2004), la modelación no solo beneficia a los estudiantes promoviendo un aprendizaje matemático en contextos relacionados con otras disciplinas, sino que también potencia sus habilidades interpretativas en la formulación y solución de problemas. Este enfoque estimula la motivación, la dedicación y el empeño de los estudiantes en relación a las matemáticas (Krawitz y Schukajlow, 2018).

Hasta el momento de la investigación, no es importante establecer la cantidad de estudiantes que aprueban o reprueban, sino evaluar la percepción, motivación e interés del estudiante en relación con la implementación del proceso de modelación en el aula. Se busca narrar este proceso, en el que el estudiante de una clase de cálculo integral aborde la determinación del nivel de líquido en un tanque como un problema real. Durante este proceso, interactúan, plantean conjeturas y proponen un modelo para construir y resignificar el concepto matemático de integral definida. El objetivo final es comprender cómo esta experiencia impacta en su aprendizaje y comprensión del tema.

La modelación y su importancia

La modelación matemática resuelve problemas no matemáticos mediante la utilización de las matemáticas (Kaiser & Maaß, 2007). Esto facilita la comprensión de los fenómenos al permitir diferentes sistemas de representación y dar significado a las actividades matemáticas (Molyneux-Hodgson, 1999). El proceso de modelación implica extraer el problema de la realidad, identificar variables clave, establecer relaciones y matematizarlas para generar nuevos conocimientos (Sadovsky, 2005). Esto demanda destrezas matemáticas para lograr un espectro variado de soluciones que caractericen el comportamiento del problema, otorgando a quien lo soluciona un papel activo y control en el proceso de resolución (Castro & Castro, 1997).

La modelación es una herramienta fundamental de aprendizaje en el aula, aplicable a la ingeniería, negocios y ciencias sociales, así como en la educación matemática (Plaza, 2016; Trelles & Alsina, 2017). Además de dar sentido a los conceptos matemáticos e integrar diversas áreas, promueve una forma alternativa de interpretar, razonar y actuar al unir lo abstracto y formal con situaciones problemáticas (Blomhøj, 2004), consolidando bases cognitivas sólidas y facilitando el desarrollo de diversos conceptos matemáticos.

Blum & Borromeo-Ferri (2009) enfatizan en la modelación un instrumento que sirve para que los estudiantes entiendan contextos y fomenten una visión positiva hacia las matemáticas. En cuanto al fortalecimiento de competencias científicas, Arrieta et al. (2007) resaltan el valor de practicar la modelación, dado que facilita a los estudiantes la creación de modelos y argumentación, consolidando de este modo su perspectiva científica del entorno. Además, Gabardo (2006) menciona que la modelación transforma la percepción de las matemáticas, pasando de un enfoque basado en la repetición y métodos analíticos a uno centrado en la construcción, comprensión y uso de métodos cualitativos y numéricos (Plaza, 2016).

Modelación y la resignificación

Existe una necesidad en la sociedad por conectar el conocimiento matemático impartido en las escuelas con situaciones del mundo real, permitiendo al estudiante resolver problemas reales y proponer soluciones (Kaiser, 2010). Sin embargo, en los cursos de matemáticas, la enseñanza tradicional carece de actividades experimentales que relacionen fenómenos reales con los contenidos matemáticos (Córdoba, 2014), en donde la modelación se presenta al final de cada capítulo como problemas de aplicación, pero no se considera una fuente de conocimiento significativa debido a su falta de contexto y conexión con la realidad. Por lo tanto, la modelación debe ser una forma de interacción con los demás, con la realidad (Arrieta, 2003). Además, en la modelación, la resignificación de un concepto matemático implica construir conocimiento a través de interacciones en un contexto particular (Buendía, 2011). En esta instancia, el concepto de integral definida adquiere un nuevo significado al aplicarse en la modelación del desafío práctico de calcular el nivel de líquido en un tanque, otorgándole sentido dentro de este procedimiento.

La experimentación, integración de la realidad y proceso de modelado

Aunque la importancia que la modelación tiene en los planes de estudio de matemáticas (Villa-Ochoa y Ruiz, 2009; Sarmiento-Rivera et al., 2020), se observa una carencia en la incorporación de actividades experimentales, tanto dentro como fuera del aula, que posibiliten la conexión de los conceptos matemáticos con distintos campos del saber, dotándoles de sentido y utilidad. La realización de experimentos es una práctica poco frecuente, tal como señala Arrieta et al. (2007), a pesar de que las matemáticas han evolucionado en gran medida gracias a su interacción con fenómenos del mundo físico real (Martínez et al., 2005). Esta situación ha dado lugar a una subestimación de la posibilidad de construir y crear conceptos matemáticos a través de la experimentación, ya sea en el laboratorio o en el aula. De manera equivocada, se ha asumido que estas actividades son exclusivas de las ciencias naturales y no tienen cabida en el ámbito de la matemática.

La realidad y su relación con el entorno son fundamentales en el trabajo de las matemáticas en el aula. La realidad se considera como punto de partida para identificar fenómenos y problemas a tratar en el ámbito matemático, ya que existe una influencia mutua entre ambos elementos, y ambos influyen en la modelación matemática escolar (Córdoba, 2014). De acuerdo a Blum y Ferri (2009), el concepto de realidad engloba todo aquello que trasciende el ámbito de las matemáticas, incorporando elementos como la naturaleza, la sociedad, las actividades cotidianas y diversas ramas del conocimiento científico. Está relacionada con los contextos de los estudiantes, es decir, con su entorno cotidiano, social, cultural o de otras ciencias en las que están inmersos (Parra-Sandoval & Villa-Ochoa, 2017).

Siguiendo la perspectiva de la EMR (educación matemática realista) propuesta por Freudenthal, las matemáticas se configuran como una actividad humana que estructura y organiza la realidad, incluso abarcando el ámbito de las propias matemáticas (Freudenthal, 1991). El término "realista" se refiere principalmente a situaciones problemáticas que los estudiantes pueden concebir, en lugar de enfocarse en la autenticidad intrínseca de los problemas en sí (Van Den, 2003). Esto no significa que la conexión con la vida cotidiana carezca de importancia, sino que los entornos no están limitados exclusivamente a situaciones concretas. Por lo tanto, tanto en un mundo imaginario como en un entorno matemático estructurado pueden actuar como contextos adecuados para presentar desafíos, siempre y cuando se perciban como auténticos desde la perspectiva de los estudiantes.

De acuerdo con las afirmaciones de Freudenthal (1991), el concepto de realidad se vincula con lo que la percepción cotidiana considera auténtico en una situación particular, lo cual ilustra la interconexión entre la realidad y el entorno. En contraste, D'ambrosio (2009) la describe como un conjunto de sucesos y fenómenos estrechamente relacionados, ya sean de origen natural, ambiental, sociocultural o emocional, que brindan datos y estímulos para la toma de elecciones y la ejecución. En resumen, se considera que la realidad abarca todo lo que existe y sucede tanto dentro como fuera del ámbito escolar, y puede ser percibida, imaginada o representada por un estudiante a través de sus sentidos y procesos mentales. Tanto la subjetividad del estudiante como el contexto en el que se encuentra inmerso influyen en su interpretación y análisis (Córdoba, 2014).

En última instancia, el contexto emerge como un elemento esencial para aprehender la realidad y erigir sentido y comprensión a partir de ella. Se halla directamente entrelazado con el dominio que infunde contenido a la situación problemática que demanda resolución (Cordero et al., 2001). De acuerdo con las consideraciones de Bressan (2017), el entorno circundante de un problema es inherente a su naturaleza y no debe ser interpretado como algo superfluo, sino como un elemento que habilita a los estudiantes a concebir la situación, modelarla y hallar su solución. Sin embargo, para que esto ocurra, las situaciones problemáticas deben ser familiares y significativas para los estudiantes, de manera que su sentido común y razonamiento sean estrategias de resolución y guíen su trabajo matemático (Villamizar et al., 2020). Esto destaca la importancia de una matemática contextualizada (Borja, 2017). En consecuencia, el contexto debe ser familiar o al menos permitir a los estudiantes realizar representaciones y crear sus propios escenarios.

La contextualización de un concepto matemático no se limita a la mera simulación en el aula mediante cualquier actividad diaria, sino que involucra la comprensión de las representaciones que los estudiantes forman de dicho concepto y el significado que sus ideas adquieren. Además, implica observar cómo aplican esas ideas en el contexto seleccionado (Cordero et al., 2001). Por lo tanto, la realidad y el contexto convergen como elementos inseparables que confieren sentido a una interacción social específica y le confieren rasgos distintivos. En el caso particular de la medición del nivel de líquido en un tanque a través de una práctica experimental, el contexto se deriva de la dinámica inherente a la sesión de clase (Córdoba, 2014).

Método

Diseño

El estudio se basó en un enfoque metodológico cualitativo, siguiendo los lineamientos de autores como Creswell (2013) y Merriam (2009). Se adoptó un diseño fenomenológico, fundamentado en Husserl (2012), con el propósito de explorar, describir y comprender las experiencias de los estudiantes en el contexto de la modelación matemática. Con el propósito de reunir los datos necesarios, se emplearon enfoques que abarcaron tanto el análisis de las producciones realizadas por los estudiantes como la creación de grabaciones breves en formato de video y audio, en las cuales se capturaron las conversaciones que surgieron durante el desarrollo de las actividades en equipo. Estas técnicas se guiaron por las recomendaciones presentadas por Flick (2018) y Miles y Huberman (1994). A través de estas estrategias, se logró obtener una perspectiva enriquecedora y minuciosa de los procesos y significados que los estudiantes forjaron durante la ejecución de la modelación matemática en el contexto educativo.

Escenario, actores y materiales

La investigación se ejecutó en el contexto de un grupo de cálculo integral con la participación de 12 varones y 18 mujeres estudiantes, quienes de manera voluntaria conformaron equipos compuestos por 5 integrantes cada uno. La formación de los grupos no siguió un método aleatorio, sino que se efectuó de forma deliberada. La experimentación tuvo su desarrollo en el aula y sus alrededores, durante sesiones con una duración de dos horas, las cuales se llevaron a cabo después de que los estudiantes hubieran asimilado el concepto de integral definida en sus clases. Para la realización de las actividades se emplearon recursos de uso común, tales como un botellón vacío, un balde, un embudo, una vara para medir la altura del nivel del agua, una guía de tareas y diversos objetos cotidianos.

En esta instancia, se llevó a cabo una actividad a escala en la que se utilizó un botellón de agua como un prototipo físico para recolectar datos reales. Estos datos luego se contrastaron con los resultados obtenidos a través del modelo matemático que se desarrolló. Aunque se brindó a los estudiantes una guía que contenía instrucciones y orientaciones, se puso un énfasis constante en fomentar la autonomía de los estudiantes y en permitir que estos aplicaran sus propias aproximaciones al problema.

Puesta en escena de las actividades

Se desarrolló un experimento vinculado al proceso de enfriamiento en una serie de cuatro etapas secuenciales (Córdoba, 2014). En el primer paso, denominado "Momento 1", los estudiantes compartieron sus ideas y suposiciones iniciales con respecto al fenómeno bajo estudio. En el segundo paso, correspondiente al "Momento 2", llevaron a cabo la actividad experimental y recopilaron los datos necesarios. En el "Momento 3", manipularon los datos obtenidos. Y finalmente, en el "Momento 4", discutieron los resultados y verificaron las conjeturas planteadas. Cada uno de estos momentos tenía un propósito específico y se enlazaron de manera coherente para brindar orden y consistencia a la práctica de modelación. Adicionalmente, se formularon preguntas guía que incentivaron el intercambio de ideas y debates dentro de los equipos. Estas actividades promovieron la interacción entre los estudiantes, quienes presentaron argumentos, ejemplos y contraejemplos al trabajar con la situación real.

Resultados y Discusión

En la siguiente sección, resaltamos los resultados de mayor relevancia y representatividad que reflejan las conclusiones alcanzadas. Se exponen fragmentos de las creaciones escritas que ejemplifican estos descubrimientos.

Momento 1. En esta parte, se tiene como objetivo estimular el saber previo de los estudiantes para que planteen hipótesis sobre cómo enfrentar el desafío y consideren posibles soluciones alternativas.

Este enfoque particular tuvo su origen en una demanda genuina detectada en una instalación de almacenamiento de combustible. El escenario es el siguiente:

Para el propósito de almacenar combustible, se dispone de un depósito con una estructura aproximadamente cilíndrica (construida en metal), *colocado en una posición horizontal. El combustible contenido en este tanque es distribuido a través de conductos hacia diversos equipos. El responsable de supervisar la gestión del combustible decide cuándo es necesario solicitar un nuevo suministro de la refinería para reponer el tanque (la reposición se efectúa mensualmente). Sin embargo, esta decisión se basa en la experiencia, ya que no cuenta con un método para conocer el volumen real de combustible en un momento determinado, lo que conlleva el riesgo de agotar el suministro. El objetivo es determinar el volumen del combustible en el tanque utilizando únicamente la medición de la altura del combustible, indicada por una vara insertada en la parte de arriba del tanque. La figura 1 muestra la representación visual del tanque.*

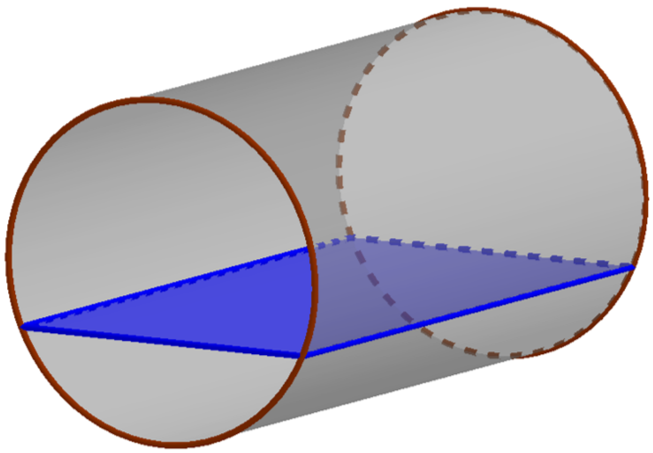


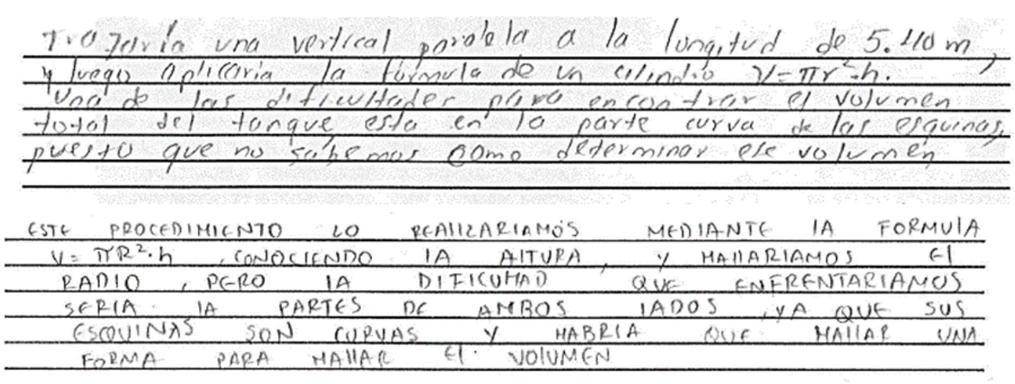
Figura 1. Diagrama del tanque y nivel de agua.

Fuente: Instrumento de evaluación

La primera actividad, se inicia con la siguiente cuestión:

Imaginemos que se le encomienda la tarea de calcular el volumen de combustible presente en un tanque en un instante específico. ¿Cómo se acercaría a esta situación? ¿Qué enfoque considera apropiado para llevar a cabo este proceso? Por favor, indique también los obstáculos que podría enfrentar.

La Figura 2 ilustra algunas las respuestas de los estudiantes:



Trazaría una vertical paralela a la longitud de 5.40 m, y luego aplicaría la fórmula de un cilindro $V=\pi r^2 \cdot h$.
Una de las dificultades para encontrar el volumen total del tanque esta en la parte curva de las esquinas, puesto que no sabemos como determinar ese volumen

ESTE PROCEDIMIENTO LO REALIZARIAMOS MEDIANTE LA FORMULA $V=\pi R^2 \cdot h$, CONOCIENDO LA ALTURA, Y HALLARIAMOS EL RADIO, PERO LA DIFICULTAD QUE ENFRENTARIAMOS SERIA LA PARTES DE AMBOS LADOS, YA QUE SUS ESQUINAS SON CURVAS Y HABRIA QUE HALLAR UNA FORMA PARA HALLAR EL VOLUMEN

Figura 2. Respuestas de los estudiantes

Fuente: Prueba de los estudiantes

Al examinar las respuestas, es evidente que algunos estudiantes consideran que calcular el volumen del tanque es idéntico tanto en posición vertical como horizontal. Esto sugiere que, para ellos, las fórmulas se aplican de manera independiente a situaciones específicas. Este enfoque, que se encuentra con regularidad en la enseñanza de matemáticas, requiere una evaluación, ya que los ejemplos abordados en clase no siempre se asemejan a situaciones reales. Por otro lado, en la segunda respuesta se destaca una mayor atención en visualizar la configuración del tanque, lo cual introduce complicaciones en la situación.

Momento 2. Aquí se les solicita a los estudiantes que anoten la altura indicada en la vara al insertarla en el tanque en distintos momentos, en los que se conocen los volúmenes de agua correspondientes. Para llevar a cabo esta tarea, utilizan un recipiente plástico para agua, un embudo, agua y una vara de medición. Posteriormente, completan una tabla de datos basada en las mediciones obtenidas. Algunos grupos señalaron posibles imprecisiones en las mediciones, atribuidas tanto a la forma del botellón como a la suposición errónea de que el tanque era plano. Estas observaciones resultan de gran importancia, ya que incitan a los estudiantes a cuestionar su aproximación ante un problema, a considerar sus limitaciones y a ponderar soluciones alternativas. Aunque en esta actividad no se abordó con precisión la forma exacta del tanque, se presentó la situación. Una vez recopilada la información, se avanza hacia la construcción de un modelo que habilite la estimación del volumen de líquido en el tanque basándose únicamente en la altura registrada en la vara.

Momento 3. Los estudiantes colaboran en grupos y deliberan sobre lo planteado en la guía, iniciando la elaboración del modelo matemático. En el transcurso de este procedimiento, surgen múltiples perspectivas, saberes preexistentes y tácticas para abordar los problemas. A continuación, se expone una creación elaborada por los estudiantes siguiendo las orientaciones brindadas en la guía (ver Figura 3):

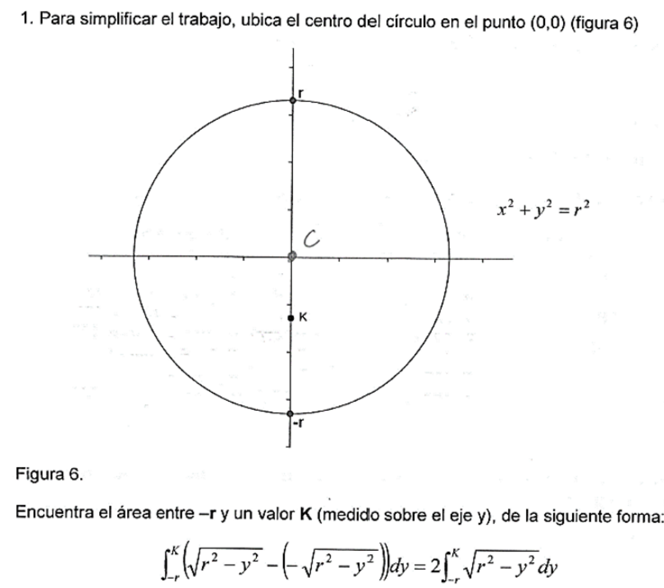


Figura 3. Secuencia de pasos matemáticos para derivar el modelo, considerando una base circular para el tanque

Fuente: Instrumento de evaluación

La Figura 4 muestra el enfoque empleado para desarrollar el modelo que posibilita el cálculo de la actividad planteada:

Explica por qué esta integral representa el área del círculo

porque viene dada de la ecuación canónica con centro (0,0) $x^2+y^2=r^2$ con r = radio, ya que al despejar "x" obtenemos $x=\sqrt{r^2-y^2}$

$$2\int_{-r}^{K}\sqrt{r^2-y^2}\,dy$$

$$y = r.\,sen\theta \qquad dy = r.\cos\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{r^2-y^2}=\sqrt{r^2-r^2sen^2\theta}=\sqrt{r^2(1-sen^2\theta)}=\sqrt{r^2\cos^2\theta}=r.\cos\theta$$

$$2\int_{-r}^{K} r.\cos\theta.\,r.\cos\theta\,d\theta = 2r^2\int_{-r}^{K}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$2r^2\int_{-r}^{K}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = r^2\int_{-r}^{K}d\theta + r^2\int_{-r}^{K}\cos 2\theta\,d\theta$$

$$r^2\theta + \frac{1}{2}r^2\, sen 2\theta\Big|_{-r}^{K} = r^2\theta + r^2\, sen\theta\cos\theta\Big|_{-r}^{K}$$

$$r^2.\,sen^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) + \cancel{r^2}\,\frac{y}{\cancel{r}}\,\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{r}\Big|_{-r}^{K}$$

$$r^2 sen^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)+y\sqrt{r^2-y^2}\Big|_{-r}^{K}$$

$$\left(r^2sen^{-1}\left(\frac{K}{r}\right)+K\sqrt{r^2-K^2}\right)-\left(r^2sen^{-1}\left(\frac{-r}{r}\right)+\cancelto{0}{(-r)\sqrt{r^2-r^2}}\right)$$

$$=\left|r^2 sen^{-1}(K/r) + K\sqrt{r^2-K^2} + \frac{\pi r^2}{2}\right|$$

Figura 4. Desarrollo del modelo matemático

Fuente: Prueba de los estudiantes

En líneas generales, los grupos no se encontraron con desafíos de relevancia al abordar la integral. No obstante, un par de equipos manifestaron ciertas inquietudes en relación al empleo de la sustitución trigonométrica para resolverla, las cuales fueron esclarecidas durante el curso de la actividad.

Momento 4. Aplicando el modelo que establece la conexión entre el área de la base, *"r"* y *"K"*, para determinar el volumen mediante la utilización del modelo derivado (ver Figura 5).

Para obtener el valor de K se procede de la siguiente manera:

Al valor de $-r$ se le suma el valor obtenido de la lectura de la vara, ese resultado sería el valor de K, el cual se reemplaza luego en la fórmula del volumen. Ejemplo: Si lectura en la vara fue de $0.07\,m$, y $-r = -0.20\,m$, entonces $K = -0.20 + 0.07 = -0.13$ y así sucesivamente. Para hallar el volumen basta multiplicar el área de la base por su altura (longitud del tanque), la cual es constante: $V = Area\ de\ la\ base \times altura$

$-r = -0.135$

$r = 0.135$

Volumen real (litros)	Altura en la vara (metros) h	K	Volumen según modelo (litros)
2	0.044	-0.091	2.368
6	0.09	-0.045	6.5156
11	0.135	0	11.1648
12	0.148	0.013	12.5316
18	0.207	0.072	18.3699

NOTA. No olvide escribir todos los procedimientos en las hojas de registro que se le han entregado

para $h = 0.044 \quad k = -0.135 + 0.044 = -0.091$

$h = 0.09 \quad k = -0.135 + 0.09 = -0.045$

$h = 0.135 \quad k = -0.135 + 0.135 = 0$

$h = 0.148 \quad k = -0.135 + 0.148 = 0.013$

$h = 0.207 \quad k = -0.135 + 0.207 = 0.072$

Entonces para una altura en la vara $h_1 = 0.044$

$k_1 = -0.091 \qquad A_1 = r^2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{k_1}{r}\right) + k_1\sqrt{r^2 - k^2} + \frac{\pi r^2}{2}$

$r = 0.135 \qquad A_1 = (0.135^2)\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-0.091}{0.135}\right) + (-0.091)\sqrt{0.135^2 - 0.091^2} + \frac{\pi(0.135^2)}{2}$

$A_1 = 0.006072\ m^2$

$V_1(\text{modelo}) = A_1 \times \text{longitud} = 0.006072 \times 0.39$

$V_1 = 0.002368\ m^3$, en litros

$V_1 = 0.002368\ m^3 \times \frac{1000\,l}{1\,m^3} = 2.368$ litros

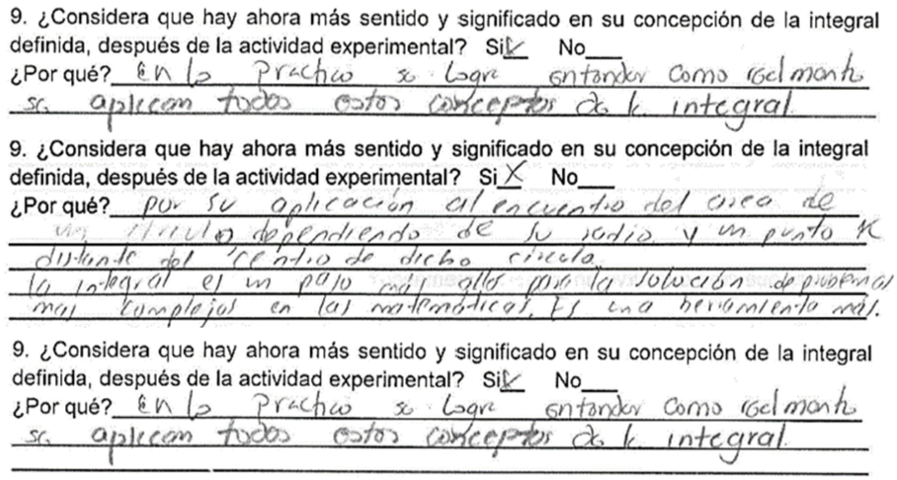
Figura 5. Determinación del volumen mediante la utilización del modelo derivado

Fuente: prueba de los estudiantes

Luego de llevar a cabo los cálculos, los distintos grupos obtuvieron resultados que, aunque con algunas variaciones debido a la precisión de las mediciones, se asemejaron entre sí. No obstante, se percataron de que los datos generados por el modelo concordaban con la información real, lo que suscitó una buena percepción en relación a la labor realizada. En medio de las conversaciones, también plantearon conjeturas predictivas, sugiriendo que a medida que se incrementaba el volumen de líquido en el tanque, el modelo se aproximaba de manera más precisa. Esto, a su vez, se alineaba con uno de los propósitos de la modelación.

La resignificación atribuida a la integral definida

Para resumir, los estudiantes lograron dar significado y relevancia al concepto de la integral, y lo aplicaron a un contexto en particular. Seguidamente, se exponen las respuestas de los estudiantes que ejemplifican este proceso (ver Figura 6):


9. ¿Considera que hay ahora más sentido y significado en su concepción de la integral definida, después de la actividad experimental? Si X No___
¿Por qué? En la practica se logro entender como realmente se aplican todos estos conceptos de la integral.

9. ¿Considera que hay ahora más sentido y significado en su concepción de la integral definida, después de la actividad experimental? Si X No___
¿Por qué? por su aplicación al encuentro del area de un circulo dependiendo de su radio y un punto K distante del centro de dicho circulo. la integral es un paso mas allá para la solución de problemas mas complejos en las matemáticas, es una herramienta mas.

9. ¿Considera que hay ahora más sentido y significado en su concepción de la integral definida, después de la actividad experimental? Si X No___
¿Por qué? En la practica se logro entender como realmente se aplican todos estos conceptos de la integral.

Figura 6. Interpretación conferida a la integral definida

Fuente: Prueba de los estudiantes

Las respuestas de todos los equipos resaltan la importancia de demostrar la aplicabilidad funcional de las matemáticas y el concepto de integral definida, al atribuirles sentido y valor en su uso en situaciones de la vida real.

Percepción de los estudiantes sobre la actividad

Los estudiantes expresaron una alta apreciación hacia la actividad, dado que el enfoque no se limitaba a la búsqueda del modelo óptimo, sino que ponía de relieve los procesos cognitivos y de colaboración inherentes al intento de resolver el problema propuesto.

Discusión

La modelación en el entorno de la clase de matemáticas involucra la interacción entre los estudiantes, la reinterpretación y el desarrollo de conocimiento mediante la colaboración en experimentación conjunta y el diálogo continuo, tal como señalan Fernández y Angulo (2019). No se limita a ser un contenido adicional o una estrategia para resolver problemas. Al establecer modelos, los estudiantes notaron que sus hallazgos matemáticos coincidían con la realidad, lo que demuestra la conexión intrínseca de las matemáticas con los contextos cotidianos. Esto ilustra el uso de la modelación para abordar problemas reales, como la determinación del nivel de líquido en un tanque, similar a otros problemas propuestos por Plaza, 2017; Roa et al. (2017) y Agudelo y García (2016); así como otros ejemplos de aplicación mencionados por Villa-Ochoa et al. (2018) y Parra-Zapata et al. (2016), que son relevantes en la industria (Basurto et al., 2016) y en la formación de ingenieros Plaza (2016) y Rendon-Mesa et al. (2015).

La práctica de modelación en el ambiente de la clase de matemáticas resalta como una opción educativa significativa y estimulante para el aprendizaje de los estudiantes (Córdoba, 2014). En este contexto, es esencial enfocarse en la reinterpretación del conocimiento matemático como un elemento central de la enseñanza, promoviendo la interacción entre los estudiantes y el profesor en su papel de mediador. Para lograr este propósito, es imprescindible incorporar la modelación en la planificación curricular y en los esquemas de las asignaturas de matemáticas, siguiendo las orientaciones delineadas por Villa-Ochoa y Ruiz (2009) y Martínez et al. (2005). El interés y la motivación demostrados por los estudiantes subrayan la importancia de estandarizar la implementación de la modelación en el entorno del aula (Olarte, 2019).

Conclusiones

Las respuestas de los estudiantes revelan que el conocimiento matemático puede ser comprendido de manera diferente a la tradicional, dejando de ser objetos aislados y sin contexto. La práctica de modelación, a través de interacciones situadas e intencionales, promueve la resignificación de ese conocimiento. En el caso de estudiantes de ingeniería, la modelación se convierte en un medio para acercarlos a la realidad profesional, donde las interacciones desempeñan un papel fundamental al integrar y dar funcionalidad al conocimiento matemático escolar en dicha realidad.

La vivencia experimental de la modelación despertó un notable interés y motivación en los estudiantes, particularmente aquellos que no habían experimentado esta oportunidad previamente en el ámbito de las matemáticas. La actividad suscitó una disposición favorable hacia el proceso de aprendizaje, propició la colaboración en equipo, posibilitó la detección de áreas de dificultad en el aprendizaje y alentó el fomento de argumentación entre los compañeros como un elemento de enriquecimiento. Los estudiantes expresaron una apreciación positiva hacia esta práctica, considerándola como una alternativa superior a las clases tradicionales.

Como recomendaciones para futuras investigaciones y prácticas educativas, es importante considerar la incorporación de la modelación en los diseños curriculares y micro curriculares de las asignaturas de matemáticas. Esto implica promover la interacción entre estudiantes y el papel del profesor como mediador, fomentando el trabajo colaborativo y la discusión constante en el aula. Además, es fundamental proporcionar a los estudiantes oportunidades frecuentes para participar en actividades experimentales y resolver problemas reales, lo que aumentará su interés, motivación y comprensión de los conceptos matemáticos.

Referencias

Agudelo, Y. M., & García, L. I. (2016). Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (46), 139-158. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/565/314

Álvarez-Macea, F., & Costa, V. A. (2019). Enseñanza del Algebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Eco Matemático*, 10(2), 65-78. https://doi.org/10.22463/17948231.2594

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. https://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/arrieta_2003.pdf

Arrieta, J., Carbajal, H., Díaz, J., Galicia, A., Landa, L., Mancilla, V., Medina, R., & Miranda, E. (2007). Las prácticas de modelación de los estudiantes ante la problemática de la contaminación del río de la Sabana. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp. 473-477). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/5299/1/ArrietaLaspr%C3%A1cticasALME2007.pdf

Basurto, A., Reséndiz, J., & Sauza, M. (2016). La matemática formal, una alternativa para la resolución de problemas técnicos en la empresa. *El Cálculo y su Enseñanza*, 7, 46-58. https://doi.org/10.61174/recacym.v7i1.96

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin,

F. Lester, A. Walby, K. Walby, *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education. https://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/Modelizacion1.pdf

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-48. https://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620/1087

Borja, D. F. (2017). Propuesta pedagógica: matemáticas en contexto. *Revista Rutas de formación: prácticas y experiencias*, 3, 60-67. https://doi.org/10.24236/24631388.n3.2016.636

Bressan, a. (2017). *Los principios de la educación matemática realista.* https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/06/DOC1-principios-de-educacion-matematica-realista.pdf

Buendía, G. (2011). El uso de las gráficas para resignificar elementos de las funciones diferenciales lineales. En R. Rodríguez, E. Aparicio, M. Jarero, L. Sosa, B. Ruíz, F. Rodríguez, J. Lezama, M. Solís (Eds.), *Memoria de la Escuela de Invierno en Matemática Educativa 13* (pp. 100-106). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C. http://funes.uniandes.edu.co/16346/1/Chavira2010Los.pdf

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Horsori. http://funes.uniandes.edu.co/13881/1/Montejo-Gamez2018Modelizacion.pdf

Cordero, F., Czarnocha, B., Díaz, L., Díaz, V., Muñoz, G., & Poblete, A. (2001). *El papel de la sociocultural en la didáctica de la matemática.* En G. Beitía (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14 (pp. 628-635). *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.* https://www.clame.org.mx/documentos/alme%2014.pdf

Córdoba, F. J. (2014). *Elementos de modelación en matemática escolar: Una práctica de aprendizaje para la formación en tecnología e ingeniería.* Editorial Académica Española.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches.* Sage Publications.

D'ambrosio, U. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. *Journal of Mathematical Modelling and Application,* 1(1), 89-98. https://bu.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1624/1080

Fernández, O., & Angulo, M. (2019). El proceso de modelación en clase de matemática. *Scientia et Technica*, 24(1), 96-103. https://doi.org/10.22517/23447214.17261

Husserl, E. (2012). *Ideas: General Introduction to Pure Phenomenology*. Routledge.

Flick, U. (2018). *An Introduction to Qualitative Research.* Sage Publications.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Kluwer Academic Publishers.

Gabardo, L. (2006). Modelación Matemática y ontología. En G. Martínez (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19 (pp. 317-323). *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.* http://funes.uniandes.edu.co/5536/1/GabardoModelacionAlme2006.pdf

Kaiser, G. (2010). Introduction: ICTMA and the Teaching of Modeling and Applications. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines, A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies, ICTMA 13* (pp.1-2). Springer. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-6271-8_1

Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom-problems and opportunities. In W. Bluma, P. Galbraith, H-W, Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study, 10* (pp. 99-108). Springer. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-0-387-29822-1_8

Krawitz, J., & Schukajlow, D. (2018). Do students value modelling problems, and are they confident they can solve such problems? Value and self-efficacy for modelling, word, and intra-mathematical problems. ZDM, 50(1-2), 143-157. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0893-1

Martínez, E., Arrieta, J., & Canul, A. (2005). Laboratorio Virtual de Matemáticas. En J. Lezama, M. Sánchez J. Molina (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18 (pp. 785-790). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. https://www.clame.org.mx/documentos/alme%2018.pdf

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation.* Jossey-Bass.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook*. Sage Publications.

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R., & Ursini, S. (1999). Mathematical modelling: the interaction of culture and practice. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 167-183. https://www.jstor.org/stable/3483166

Olarte, J. A. (2019). Homogeneizar la práctica de la modelación: un reto del sistema educativo colombiano. *Revista Educación,* 44(1), 440-445. https://doi.org/10.15517/revedu.v44i1.36285

Parra-Sandoval, H., & Villa-Ochoa, J. A. (2017). Vinculación de las matemáticas con la realidad. Implicaciones en la conformación del pensamiento del profesor. *Paradigma, 38*(1), 288-311. https://www.revistas-historico.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/5714/3040

Parra-Zapata, M. M., Parra-Zapata, J., Ocampo-Arenas, M., & Villa-Ochoa, "J. A. (2016). Índice de Masa Corporal. Una experiencia de modelación y uso de modelos matemáticos para el aula de clase. *Número*, (92), 21-33. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/5293

Plaza, L. F. (2015). Perspectivas en la enseñanza–aprendizaje del modelamiento matemático en ingeniería. Caso ecuaciones diferenciales. *Revista Páginas de Ingeniería*, 3, 35-39. https://www.academia.edu/29729815/Perspectivas_en_la_ense%C3%B1anza_aprendizaje_del_modelamiento_matem%C3%A1tico_en_ingenier%C3%ADa_Caso_Ecuaciones_Diferenciales

Plaza, L. F. (2016). Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. *Revista Científica*, 25(1), 176-187. https://doi.org/10.14483//udistrital.jour.RC.2016.25.a1

Plaza, L. F. (2017). Modelamiento Matemático para vaciado de Tanques. *Scientia Et Technica*, 2(1), 89-94. https://doi.org/10.22517/23447214.9185

Rendon-Mesa, P. A., Esteban, P. V., & Villa-Ochoa, J. A. (2015). La modelación matemática: una experiencia de formación en ingeniería.

RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1(1), 440-445. http://funes.uniandes.edu.co/8600/1/Duarte2015Modelacion.pdf

Roa, O. L., Contreras, G. A., Medina, L. V., & Vega, H. (2017). Modelado matemático, simulación, análisis y control de un sistema hidráulico interactivo-tres tanques en serie. *Revista de Tecnología,* 16(1), 89-94. https://doi.org/10.18270/rt.v16i1.2318

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Revista Educación Matemática*, 314-338. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/2016/08/04/la-modelizacion-matematica-en-la-formacion-de-ingenieros/

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos.* Libros del Zorzal.

Salett, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática,* 16(2), 105-125. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol16/vol16-2/vol16-2-6.pdf

Sarmiento-Rivera, D., Aldana, E., & Solar, H. (2020). La modelación matemática: un análisis de los planteamientos en documentos curriculares colombianos. *Espacios*, 41(44), 358-375. https://doi.org/10.48082/espacios-a20v41n44p28

Trelles, C. A., & Alsina, A. (2017). Nuevos conocimientos para una educación matemática del S. XX1: panorama internacional de la modelización en el currículo. UNIÓN, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 13(51), 140-163. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/405

Van Den, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. *Revista Virtual-Universidad Católica del Norte,* (27), 1-21. https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102

Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D., & Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en matemáticas. *Formación Universitaria,* 11(2), 25-3. http://doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Villamizar, F., Martínez, A., Cuevas, C., & Espinosa-Castro, J. (2020). Mathematical modeling with digital technological tools for interpretation of contextual situations. *Journal of Physics: Conference Series,* 1514(1), 012003:1-6. http://doi.org/10.1088/1742-6596/1514/1/012003