

# Eco Matemático

## Scientific Journal of Mathematics



### Fortaleciendo Competencias Matemáticas: Propuesta Didáctica para el Plano Cartesiano en Estudiantes de Octavo Año en Costa Rica

#### *Strengthening Mathematical Competencies: A Didactic Proposal for the Cartesian Plane for Eighth Grade Students in Costa Rica*

Fabiola Catalina Delgado-Navarro<sup>1\*</sup>

<sup>1\*</sup>MSc. en Matemática Educativa, [fdelgado@uned.ac.cr](mailto:fdelgado@uned.ac.cr), <https://orcid.org/0000-0001-9635-0811>, Universidad Estatal a Distancia, San José, Costa Rica.

**Forma de citar:** Delgado-Navarro, F. C. (2025). Fortaleciendo Competencias Matemáticas: Propuesta Didáctica para el Plano Cartesiano en Estudiantes de Octavo Año en Costa Rica. *Eco Matemático*, 16(2), 57-72. <https://doi.org/10.22463/17948231.5032>

Recibido en Febrero 13, 2025 – Aprobado en Junio 17, 2025.

#### Keywords:

Secondary education,  
Technology, Intelligent  
tutorial system,  
Cartesian coordinates,  
learning.

**Abstract:** This article presents research focused on the implementation of a teaching proposal aimed at strengthening the understanding of the Cartesian plane, the distance between two points, and the calculation of midpoints in eighth-grade secondary school students in Costa Rica, whose ages range from 12 to 14 years old. The pedagogical intervention is based on the use of the CoorCar Intelligent Tutorial System and the teaching model proposed by Cuevas-Pluinage, integrating digital technological tools to enhance the teaching-learning process. The research is framed within the educational design approach, developed in three phases: design, experimentation, and retrospective analysis, through a single classroom study cycle. The findings show that the activities applied significantly favored the learning of analytical geometry, allowing students to improve in the location of points, the identification of Cartesian axes (abscissas and ordinates), the calculation of distances between two points, as well as in the determination of midpoints and intermediate points.

\*Autor para correspondencia: [fdelgado@uned.ac.cr](mailto:fdelgado@uned.ac.cr)

<https://doi.org/10.22463/17948231.5032>

**Palabras clave:**

Enseñanza secundaria, Tecnología, Sistema tutorial inteligente, coordenadas cartesianas, aprendizaje.

**Resumen:** Este artículo presenta una investigación centrada en la implementación de una propuesta didáctica orientada a fortalecer la comprensión del plano cartesiano, la distancia entre dos puntos y el cálculo de puntos medios en estudiantes de octavo año de educación secundaria en Costa Rica, cuyas edades oscilan entre los 12 y 14 años. La intervención pedagógica se fundamenta en el uso del Sistema Tutorial Inteligente CoorCar y el modelo didáctico propuesto por Cuevas-Pluinage, integrando herramientas tecnológicas digitales para potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje. La investigación se enmarca en el enfoque de diseño educativo, desarrollado en tres fases: diseño, experimentación y análisis retrospectivo, a través de un único ciclo de estudio de aula. Los hallazgos evidencian que las actividades aplicadas favorecieron significativamente el aprendizaje de la geometría analítica, permitiendo a los estudiantes mejorar en la ubicación de puntos, la identificación de los ejes cartesianos (abscisas y ordenadas), el cálculo de distancias entre dos puntos, así como en la determinación de puntos medios e intermedios.

**Introducción**

Enseñar bien la geometría implica [el profesor] saber reconocer problemas y teoremas geométricos interesantes, apreciar la historia y el contexto cultural de la geometría, y comprender los muchos y variados usos que se le dan a la geometría. (Jones, 2002, p. 122)

Este enfoque integral de enseñar geometría subraya la importancia de ir más allá de la simple memorización de fórmulas y conceptos abstractos. Al reconocer problemas y teoremas geométricos interesantes, el profesor tiene la oportunidad de transformar el aprendizaje en una experiencia dinámica y desafiante.

La matemática, especialmente la geometría, suele ser difícil en la educación secundaria (12-14 años) (NCTM, 2000). La geometría demanda a nuestros sentidos visuales, estéticos e intuitivos, apreciar el diseño y la arquitectura. Con relación a los conceptos introductorios de la Geometría Analítica, es importante destacar que a menudo los profesores no logran abordarlos de manera exhaustiva debido a las limitaciones de tiempo, a pesar de que estos conceptos están incluidos en todos los programas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) desde el año 2012.

La Geometría Analítica es una parte fundamental de la educación matemática y proporciona herramientas útiles para comprender la relación entre la geometría y el álgebra a través de las coordenadas cartesianas. Sin embargo, la complejidad de estos conceptos en ocasiones dificulta la inclusión completa en el currículo académico. A lo largo de la enseñanza escolar se implementan varias actividades con el fin de apoyar a los estudiantes a desarrollar habilidades en el plano cartesiano, tales como: ubicar y reconocer puntos en el plano cartesiano, reconocer los ejes cartesianos, calcular la distancia entre dos puntos, y determinar el punto medio de un segmento (MEP, 2012).

A pesar de los intentos por enseñar el plano cartesiano, muchos alumnos continúan teniendo dificultades para comprender y utilizar tales conceptos, sobre todo cuando se trata de situar figuras geométricas y puntos (Aravena y Morales, 2018). El uso de tecnología educativa, como GeoGebra, mejora el aprendizaje de geometría analítica (Torres, 2017). Este procedimiento ayuda a los alumnos a comprender conceptos como ubicación de puntos en el plano cartesiano, distancia entre dos puntos y punto medio.

Valencia (2020) señala que el uso del plano cartesiano es un desafío para los estudiantes de nivel básico, a pesar de que este tema es obligatorio en los programas de educación. Muchas veces, los estudiantes tienen dificultades para trazar el plano cartesiano de manera correcta, mantener la misma distancia entre cada unidad de los ejes, colocar las coordenadas de forma adecuada y existe una confusión con los ejes de las abscisas y ordenadas, lo que afecta su aprendizaje en este tema. Por lo tanto, es tarea del profesor buscar formas para que los estudiantes de secundaria dominen el tema del plano cartesiano mediante estrategias pedagógicas adecuadas, fomentando la práctica y la comprensión visual, así como relacionando este tema con situaciones de la vida cotidiana para que los estudiantes puedan ver la importancia y utilidad de este concepto.

Tello y et al. (2016) desarrollaron una unidad didáctica sobre la distancia entre dos puntos para que los estudiantes comprendan este concepto y puedan calcularlo en la recta numérica, además, de utilizar el teorema de Pitágoras. Los estudiantes encontraron atractivo el cálculo de la distancia entre dos puntos debido a su aplicación en situaciones cotidianas, lo que mejoró su motivación y aprendizaje. Proponiendo soluciones y procedimientos matemáticos, las tareas ayudaron a los estudiantes a entender el uso de las matemáticas en la vida diaria y a distinguir la distancia entre puntos en la recta, el plano y en relación con el teorema de Pitágoras.

Del mismo modo, en su investigación, Acuña (2001) describe las dificultades que experimentan los estudiantes de secundaria al tratar de establecer el orden correcto de las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano. En lugar de utilizar el plano para trabajar en un espacio orientado de dos dimensiones, los estudiantes limitan su uso solo a la descripción de pares de números positivos o negativos.

Además, según Acuña (2005), los estudiantes de bachillerato, que tienen entre 16 y 19 años, suelen tener dificultades en reconocer puntos en el plano cartesiano, ubicar los números positivos y negativos en los ejes horizontal y vertical del plano cartesiano y entender los términos "ordenada" y "abscisas" en geometría analítica.

En esta misma línea, según la investigación de

Pérez (2022) al aplicar actividades basadas en el enfoque variacional-covariacional, los estudiantes de secundaria presentaban dificultades para entender el concepto de covariación debido a su falta de habilidad para reconocer y graficar puntos en el plano cartesiano.

Debido a lo anterior, los estudiantes de secundaria enfrentan desafíos en geometría analítica con conceptos como el plano cartesiano, identificar los ejes, la ubicación de puntos, el cálculo de distancia entre dos puntos y el punto medio de un segmento. Se propone una estrategia educativa innovadora usando la tecnología del sistema tutorial inteligente "CooCar".

Este enfoque pedagógico busca mejorar la enseñanza de la geometría analítica a estudiantes costarricenses de octavo nivel (12-14 años) mediante recursos tecnológicos. Su objetivo es facilitar la comprensión de conceptos fundamentales y promover un aprendizaje más interactivo y dinámico. En última instancia, pretende fortalecer las habilidades matemáticas de los estudiantes para prepararlos mejor ante futuros desafíos académicos y profesionales.

### 1. Modelo Didáctico Cuevas- Pluvinage

En la actualidad, todavía se observa una enseñanza tradicional y memorística en las clases de matemáticas, donde el profesor "explica" los conceptos resolviendo problemas rutinarios, mientras los estudiantes toman apuntes para memorizar y pasar los exámenes ad hoc. Cuevas y Pluvinage (2003), contrario a la propuesta anterior, proponen una ingeniería didáctica basada en proyectos de acción práctica para desarrollar actividades que fomenten la enseñanza con un aprendizaje significativo de las matemáticas. De su propuesta destacan los siguientes aspectos clave:

El estudiante debe estar siempre realizando una acción, en el caso de matemáticas resolviendo o intentando resolver un problema. Descomponer un problema complejo en diversas actividades más simples, establecer actividades que promuevan la conversión de los diferentes registros de representación semiótica, y proponer problemas inversos y directos.

Por ejemplo, el sistema CoorCar no actúa si el estudiante no interactúa; sin embargo, proporciona retroalimentación ante cada respuesta del estudiante. Esta retroalimentación se divide en dos fases: corrección de sintaxis, donde se evalúa la precisión de la escritura de la solución; y revisión semántica, donde se determina la corrección de la respuesta en sí. Un caso ilustrativo es cuando se solicita al Estudiante 6 escribir las coordenadas de un punto en el plano. En este caso, el estudiante omite la coma que separa las coordenadas, y el sistema responde enviándole un mensaje que le insta a realizar la corrección utilizando su propio editor. Este enfoque de retroalimentación segmentada permite un proceso más detallado y efectivo en la corrección y mejora de las respuestas de los estudiantes.

Cada vez que se introduzca un concepto o noción matemática, intentar partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando. Este problema puede generar ejercicios o subproblemas cuya solución, en forma estructurada y coordinada, lleven al estudiante a definir o mostrar el concepto matemático deseado. Esto, desde luego, no es posible de realizar para cada uno de los conceptos intrínsecos a un determinado tema, por lo que toca decidir al docente cuál o cuáles son los más trascendentes. En todo caso, nunca introducir un concepto mediante su definición formal (Cuevas y Pluvillage, 2003, p. 55)

## 2. Uso de la tecnología

En los últimos años, el uso de herramientas tecnológicas ha aumentado y ha contribuido a favorecer el aprendizaje de los estudiantes de medio superior y de los universitarios, ya que brinda nuevas estrategias para un mejor aprovechamiento académico. De esta forma, se menciona que "la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el aprendizaje de los alumnos" (NCTM 2000, p. 24). La tecnología no viene a sustituir al profesor, sino, a darle un apoyo académico, enriquecer las clases y tener clases más dinámicas, sin embargo, el profesor debe conocer cuando utilizar las herramientas tecnológicas o cuando el lápiz y el papel.

Un estudio relevante es el elaborado por Ospina

et al. (2016), quienes realizaron una investigación, en noveno año, en cuatro instituciones de secundaria urbanas de Colombia. El objetivo de la investigación fue evidenciar cómo el uso de las TIC motiva a los estudiantes que utilizan la tecnología durante sus clases en comparación con aquellos que no las incorporan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Asimismo, los investigadores trabajaron con 8 profesores, 2 de cada institución, para lo cual tuvieron en cuenta diferentes contextos, y con 20 estudiantes, 5 de cada institución. Se aplicó un cuestionario para obtener la información. De esta manera, los autores concluyeron que los estudiantes cuyo interés es mayor se motivan más cuando los profesores incorporan las TICs en sus clases y evidenciaron la necesidad de que los centros educativos integren las herramientas tecnológicas y capaciten a sus profesores.

Asimismo, Polania et al. (2015) realizaron una investigación documental sobre la incorporación de las TIC por parte de los profesores durante los últimos 5 años. Se tomaron en cuenta tanto investigaciones a nivel nacional en Colombia como las internacionales, en las que los autores analizaron distintas temáticas novedosas asociadas al uso de la tecnología, así como enfoques teóricos y metodologías de enseñanza. De esta manera, concluyeron que muchos profesores no tienen la formación o la capacitación adecuada para el uso de las TIC en sus aulas; además, hay una carencia de incorporación de equipos tecnológicos, infraestructura, conexión a internet y formación académica. A su vez, reconocen la necesidad de hacer uso de la tecnología en sus clases para evitar que sean únicamente magistrales e incorporar lecciones dinámicas y creativas para la enseñanza y el aprendizaje.

Lo anterior se ve respaldado en el hecho de que los autores argumentan que "las TIC, mediante su apropiación pedagógica, brindan posibilidades de transformar el papel del estudiante y de los profesores, ya que son medios de comunicación, experimentación e intercambio de conocimientos" (Polania et al., 2015, p. 84).

En la investigación de Zamora-Araya et al. (2020), se destaca el valioso papel de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como recursos enriquecedores para los procesos de

enseñanza-aprendizaje, específicamente en el ámbito de las matemáticas. El estudio se centra en contrastar la hipótesis de que la incorporación de herramientas tecnológicas, como videos y software matemáticos, mejoran el rendimiento académico de los estudiantes en un curso de matemática. Para realizar esto, se llevó a cabo un cuasiexperimento con tres niveles de tratamientos cuya variable dependiente está representada por la nota del segundo examen parcial, donde el primer grupo experimental utilizó videos, software y el apoyo de las clases del docente, el segundo grupo únicamente el apoyo de los videos. Aunque el análisis estadístico no arrojó significancia, los tamaños de efecto y los niveles de aprobación indican evidencia a favor del uso de TIC para mejorar el rendimiento académico en el curso, reforzando la pertinencia de integrar tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

Cuevas y Martínez (2013) proporcionan un modelo para la construcción de Entornos Instruccionales para el Aprendizaje de las Matemáticas (EIAM) con características de un Sistema Tutorial (ST) para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este modelo busca utilizar el ordenador como una herramienta cognitiva para mejorar la enseñanza de las matemáticas, promoviendo la adquisición de conceptos de cálculo diferencial a través de CalcVisual. Aunque el EIAM representa un cambio en la forma tradicional de enseñar matemáticas, se destaca la importancia de que el profesor acepte o elija las opciones adecuadas, lo que sugiere que EIAM puede ser un apoyo para el profesor en lugar de sustituirlo completamente. Además, se menciona la resistencia a modificar el trabajo tradicional, ya que se alteran los roles de profesor y alumno, y se requieren habilidades autodidácticas por parte de los estudiantes. Los autores también destacan la importancia del ordenador en la educación que ayuda a mejorar la enseñanza, y cómo el EIAM permite a los estudiantes repasar fácilmente lo estudiado por su cuenta para una mejor comprensión.

### 3. Software Educativo

Según Torres (2017), "el software educativo es aquella herramienta que permite el aprendizaje a través de la interacción entre estudiantes y maestros, aplicando herramientas y situaciones reales" (p.

59). Es por ello por lo que, en la investigación se implementará un software que permita a los estudiantes tener un aprendizaje enriquecedor.

Además, la utilización de software matemático, según Carbajal (2013), como "programas de cálculo simbólico, como Derive, hojas de cálculo como Excel, software de geometría dinámica como Geogebra, Cabrí, Cinderella y sistemas tutoriales inteligentes (CALCVISUAL, LIREC)" (p. 21), es funcional para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas tanto en estudiantes como en profesores.

Del mismo modo, Cuevas y Mejía (2003) mencionan que el CalcVisual es una herramienta tecnológica para apoyar el curso de cálculo diferencial, el software permite graficar las funciones, conocer las raíces de éstas, las asíntotas, los puntos críticos y de inflexión, escribir la función o darle una función propuesta por el software, analizar la paridad de una función, la concavidad, los máximos y mínimos y otros aspectos relevantes para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. El programa CalcVisual tiene dos intenciones: en primer lugar, enseñar a graficar una función y, en segundo lugar, reconocer e interpretar la gráfica de una función, mediante la aplicación de los conceptos del cálculo diferencial.

Cabe señalar, que el programa Calc Visual se procura que el estudiante aprenda a observar e identificar los elementos para elaborar una gráfica, ya sea que obtenga la información algebraica y numérica, o bien, se pueda reconstruir o reconocer el polinomio a partir de la gráfica.

Igualmente, Cuevas y Pluinage (2009) reportaron en su investigación que la Dra. Magally Martínez comparó dos grupos del curso Cálculo I. En uno de los grupos, conformado por estudiantes de la carrera de ingeniería informática administrativa (LIA) de la Universidad UAEM Valle de Chalco, se utilizó el Calc Visual en el curso de Cálculo I por primera vez, mientras que, en el otro grupo, conformado por estudiantes de Ingeniería en Computación (ICO) de la misma universidad, se implementó la clase de manera tradicional con otro profesor. Los resultados fueron satisfactorios para los investigadores, ya que el índice de reprobación para

el grupo que utilizó Calc Visual fue del 25%, mientras que para el grupo que tuvo una clase tradicional fue del 80%. Asimismo, los autores mencionan que el uso de las herramientas del Calc Visual facilita la actividad de factorización algebraica mediante las herramientas que el software presenta.

Adicionalmente, Cuevas et al. (2018) proponen una estrategia para introducir el pensamiento funcional y el concepto de función real en un curso de cálculo diferencial mediante tecnología digital. Esta investigación se realizó en el centro universitario Valle de Chalco con 45 estudiantes de ingeniería en computación en el segundo semestre del año académico 2016-2017. Se impartieron tres actividades diseñadas en una plataforma con un escenario didáctico interactivo digital (EDID) de poleas basado en la didáctica de Cuevas y Pluinage. Se utilizaron los softwares Derive y Calc Visual en dos grupos de estudiantes, mientras que en los otros dos grupos se implementó una clase magistral.

Para introducir el concepto de función, en la primera actividad, que es una representación de la polea jalada por un burro en un extremo y una cubeta con agua en el otro extremo, se hace preguntas al estudiante para que observe lo que está fijo y lo que varía, y se le pide que cambie los valores del radio de la polea y la longitud de la cuerda para que logre comprender conceptos como constante, variable independiente y dependiente, parámetro, dominio, rango y variación. En la segunda actividad, se hace una modelación geométrica al quitar del escenario la polea, la cubeta, el burro y la cuerda, y se dejan solo las letras que identifican cada uno de ellos. En la tercera actividad, se crea una aplicación digital y se sitúan puntos en un plano cartesiano para que el estudiante pueda identificar la relación funcional entre las variables. En conclusión, Cuevas et al. (2018) señalan que el concepto de función es complejo tanto de aprender como de enseñar, y se trata de una alfabetización continua. Sin embargo, su propuesta resultó efectiva para introducir este concepto en el curso de cálculo diferencial mediante el uso de tecnología digital y actividades interactivas. También Cuevas utilizó este modelo sencillo, sin software para introducir función en la educación básica (Cuevas, 2019).

Por otro lado, Álvarez (2009) realizó un

estudio sobre la utilización del software Lirec en la Universidad ETAC nodo de Coacalco en el III semestre de bachillerato. Se aplicó un diagnóstico en línea y un examen escrito, en el que se explicó el uso del software Lirec en el tema de la línea recta de geometría analítica, que abarca los contenidos de coordenadas cartesianas, pendiente de una recta, determinación de rectas, ecuación de la recta, obtención de la gráfica de la ecuación y aplicaciones de la recta. Posteriormente, se realizó un análisis de los resultados obtenidos. Lirec permite al estudiante trabajar a su propio ritmo en las actividades propuestas por el investigador y mejorar la dificultad que presentan los estudiantes en la ubicación de puntos en el plano cartesiano. Además, se destaca que los estudiantes muestran interés en trabajar con la computadora en las actividades matemáticas y que hay pocos softwares educativos interactivos para los estudiantes, como Calc Visual, Lirec, TutorEst, entre otros.

#### **4. Sistema Tutorial Inteligente de Geometría Visual (Coordenadas Cartesianas-CoorCar)**

De acuerdo con Álvarez (2009), los sistemas tutoriales inteligentes son: "un software que tiene la finalidad de satisfacer un tipo de educación masificada, de una sociedad cada vez más demandada de educación. Un software de tipo tutorial intenta presentar información y cumple las funciones de un tutor o guía y es capaz de introducir al estudiante en nuevos conceptos y materiales. Son de uso individual y el avance es controlado por cada estudiante". (p. 114)

De lo anterior, se concluye que el software no tiene como objetivo sustituir al profesor, sino que permite al estudiante interactuar con el software a través de actividades y elaborarlas a su propio ritmo de aprendizaje.

La presente propuesta educativa tiene como objetivo utilizar herramientas digitales, como el software de geometría visual de coordenadas cartesianas (CoorCar), para la comprensión de los conceptos como la ubicación de un punto en el plano cartesiano, la distancia entre dos puntos, el punto medio y los puntos intermedios mediante una secuencia didáctica realizada con la didáctica de Cuevas-Pluinage. Se propone utilizar el CoorCar como herramienta digital para el aprendizaje y

enseñanza de la geometría analítica, elaborar actividades bajo el marco teórico de Cuevas-Pluinage e implementarlas junto con el CoorCar, para que los estudiantes en otros cursos puedan comprender contenidos de la geometría analítica. Uno de los principales atributos de este software, es que no es resolovedor, esto es, no resuelve el problema al alumno, por el contrario, le dota de diversas herramientas para que sea el propio estudiante quien llegue a la solución de los problemas planteados.

En la actualidad, existe una variedad de software que permiten a los estudiantes resolver problemas sencillos y complejos con soluciones inmediatas, pero muy pocos están desarrollados de manera didáctica y diseñados como sistemas tutoriales inteligentes, como es el caso de Geom Visual. Este software permite al estudiante aprender los conceptos de geometría analítica de manera efectiva y amigable, ya que incluye una asesoría continua para el usuario.

### Características del software Geometría Visual

1. GeomVisual está diseñado para la enseñanza y aprendizaje del sistema de coordenadas cartesianas.

2. Permite que el estudiante-usuario proponga problemas o que el software le presente problemas para resolver.
3. Es una herramienta útil para el profesor, ya que permite delegar tareas y seguimiento de los avances de los estudiantes.
4. El estudiante-usuario puede equivocarse las veces que sea necesario en el proceso de resolución de problemas.
5. Es un software interactivo que guía y ayuda al estudiante en la resolución de problemas de geometría analítica.

### Descripción del Sistema Tutorial Inteligente CoorCar de Geometría Visual

El software CoorCar tiene dos menús, uno de persiana y otro de iconos. El menú de persianas presenta 3 temas de geometría analítica. Al seleccionar cualquiera de los tres temas, aparece un submenú con el contenido referente al mismo. (Figura 1)

Depende del problema y del nivel de resolución en que se encuentre estarán encendidas o deshabilitadas durante su sesión.

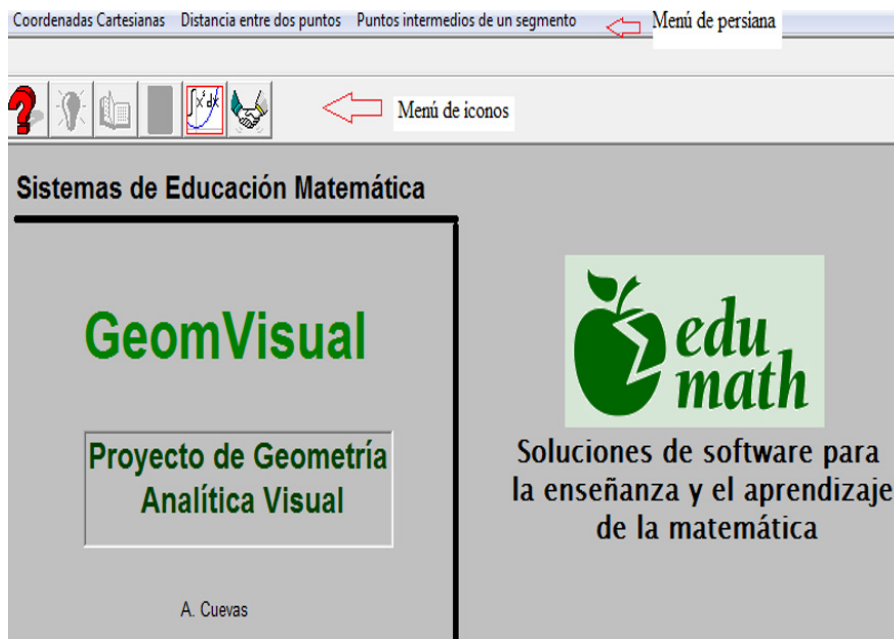


Figura 1. Interfaz de Coor-Car.

Fuente: Geom-Visual: Coordenadas cartesianas

El software CoorCar fue diseñado para permitir que el estudiante interactúe de manera individual con el apoyo de la computadora. El estudiante escribe las respuestas a las preguntas formuladas por el software y, durante el proceso, recibe de forma inmediata un mensaje que indica si la respuesta dada es correcta o incorrecta.

De esta manera, los estudiantes tienen una participación directa y activa con CoorCar, ya que el software no funcionará sin la colaboración del estudiante.

El menú de persiana contiene todas las lecciones y juegos de CoorCar y se podrá optar por cualquiera y en cualquier orden. El orden en que se exhiben es un orden sugerido para el estudiante, pero queda a decisión de este o del profesor la ruta que se elija.

A continuación, se presentan los temas que el CoorCar desarrolla:

### Tema 1: Coordenadas cartesianas

- Submarino (Juego con coordenadas cartesianas)
- Ubicar puntos en el plano cartesiano
- Reconocer puntos del plano (Operación inversa de la operación anterior)
- Mover puntos del plano (Juego de atinarle a un blanco moviendo un punto mediante cambios en ordenada y abscisa)

### Tema 2: Distancia entre dos puntos

- Distancia entre dos puntos: {(GeomVisual propone dos puntos. Tu propones los puntos)

(Opción si el estudiante desea proponer puntos o que GeomVisual los genere)

- Trazar un segmento
- Dada distancia, calcular punto (Operación inversa a calcular distancia entre puntos)
- Diseñar lugares

### Tema 3: Puntos intermedios de un segmento

- Punto medio: {(GeomVisual propone dos puntos. Tu propones los puntos)
  - ◊ Doy punto medio, tu propones segmento (Operación inversa a calcular punto medio)
- Punto intermedio: {(GeomVisual propone dos puntos. Tu propones los puntos)
  - ◊ Doy razón, propones segmento (Operación inversa a calcular punto intermedio)
- Construir un triángulo (Problemas de aplicación)

### Materiales y métodos

El estudio se enmarca en un diseño de aula estructurado en tres etapas: planificación, implementación y evaluación retrospectiva. Se realizó en 2022 en un colegio privado de Costa Rica con estudiantes de octavo año. Se trabajó con un grupo intacto (muestreo no probabilístico por conveniencia): participaron inicialmente 16 estudiantes con edades entre 12 y 14 años. Para el análisis se consideró la submuestra de 10 estudiantes que completaron las tres actividades previstas, lo que representa una retención del 62,5 %.

**Criterios de inclusión:** los estudiantes matriculados en octavo año del centro participante que asisten a las sesiones del estudio y completan las actividades programadas por la investigadora.

**Criterios de exclusión:** los estudiantes que no completaron las actividades y no asistieron a las lecciones de Matemática.

### Procedimiento

1. Pretest e instalación de CoorCar.
2. Cinco sesiones presenciales: plano cartesiano y ubicación y reconocimiento de puntos; distancia entre dos puntos; punto medio y puntos intermedios cada uno con trabajo guiado con hojas de exploración.
3. Postest.
4. Análisis: estadística descriptiva.

### 3.1 Fase de Diseño

Se seleccionó un grupo de estudiantes de secundaria cuyo contenido temático tuviera la enseñanza del plano y coordenadas cartesianas. Se solicitó un laboratorio de cómputo donde llevar a cabo la experiencia didáctica. Del programa se eligieron cinco sesiones en las que se llevaría a cabo. Se elabora el pretest para conocer las deficiencias de los estudiantes en el contenido y luego, en la primera sesión se realizaría la instalación en cada computadora del sistema inteligente CoorCar, y se explicaría su manejo. Posteriormente, se redactan las hojas de exploración y aprendizaje guiado, además, se decidió que el profesor durante las sesiones con el sistema CoorCar, solo actuaría como testigo, respondiendo solo a preguntas de manejo y dejando a los estudiantes el aprendizaje de forma autónoma y colaborativa puesto que se permitiría el intercambio de preguntas entre ellos. Para finalizar, se aplicaría un postest para evaluar el aprendizaje que obtuvieron los estudiantes a través de la aplicación de las tres actividades, con la ayuda del CoorCar. Este postest permitiría medir de manera integral la comprensión y asimilación de los conceptos abordados durante el

uso de la herramienta.

### 3.2 Fase de Experimentación

La investigación contó con la participación inicial de 16 estudiantes de octavo año de secundaria del Saint Margaret School de Costa Rica durante el año 2022, pero se seleccionaron los datos únicamente de 10 estudiantes que fueron los que completaron todas las actividades propuestas. Los participantes tenían edades comprendidas entre los 12 y 14 años.

Se desarrollaron una serie de actividades para enseñar el tópico de coordenadas cartesianas de geometría analítica utilizando el sistema tutorial inteligente CoorCar. Para formular las actividades se utilizó la didáctica de Cuevas-Pluvinage (2003). Dentro de este tema se cubrieron los puntos del programa de estudios: ubicación de puntos en el plano cartesiano; distancia entre dos puntos; punto medio y puntos intermedios.

Las actividades didácticas, se llevaron a cabo durante cinco sesiones de trabajo presenciales con el grupo de estudiantes, las cuales se describen en detalle en la Figura 2..

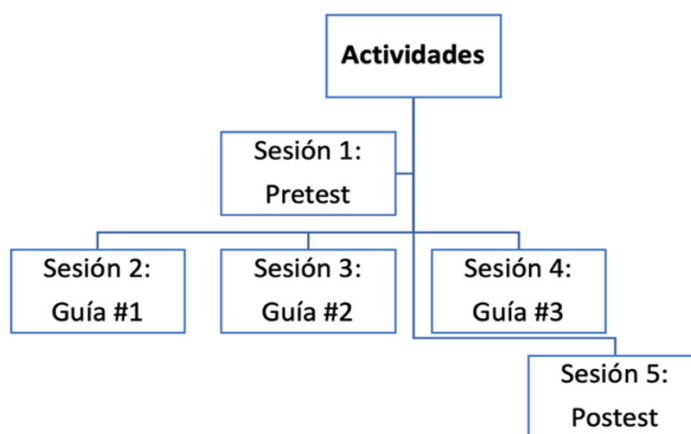


Figura 2. Sesiones de las actividades implementadas.

Fuente: Elaboración propia.

#### Fase 1: Preparación y diseño

La planificación y diseño se organizaron en cinco sesiones. La primera sesión incluyó un pretest para evaluar el conocimiento inicial de los estudiantes. La segunda sesión se centró en ubicar y reconocer puntos en el plano cartesiano. La tercera

sesión encontrar la distancia entre dos puntos y en la cuarta sesión calcular el punto medio y los puntos intermedios de un segmento. Finalmente, en la quinta sesión, se aplicó un postest para evaluar lo estudiado durante las 3 actividades. Cada sesión incorporó hojas de exploración y aprendizaje guiado, además del uso del Sistema Tutorial CoorCar (Geom

Visual). Estas actividades siguieron los principios de la didáctica de Cuevas-Pluinage para explorar la eficacia del sistema tutorial en mejorar la enseñanza y aprendizaje de la educación matemática.

Se aplicaron, un pretest, 3 sesiones y un postest que se describen a continuación:

### ***Sesión 1. Pretest***

Se inicia con la implementación de un diagnóstico a los alumnos con el propósito de evaluar sus conocimientos previos en geometría analítica, para comprender las habilidades que los estudiantes poseían antes de comenzar con las actividades.

Asimismo, como parte del proceso, se procedió a instalar el programa en las computadoras de los estudiantes, asegurando así que contaran con acceso al Sistema Tutorial CoorCar (Geom Visual) para realizar las actividades relacionadas con la geometría analítica. La instalación del programa en las computadoras de los estudiantes fue fundamental para garantizar la participación y facilitar el aprendizaje.

### ***Sesión 2. Ubicación de puntos en el plano cartesiano.***

La actividad 2 se evaluó la capacidad de los estudiantes en ubicar y reconocer puntos en un plano cartesiano, además, en distinguir entre la abscisas y ordenadas. En la hoja de exploración se presentaron ejercicios donde debían ubicar puntos específicos en el plano cartesiano del Sistema Tutorial CoorCar. También, se realizó una actividad en la que los estudiantes tenían que atinar a un blanco en el plano cartesiano, ajustando las coordenadas de manera precisa.

### ***Sesión 3. Distancia entre dos puntos.***

En la actividad 3 los estudiantes calculaban la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano con el Sistema Tutorial CoorCar y el menú de ayuda, para completar sus hojas de exploración de manera más eficiente. Se les anima dibujar segmentos diagonales, horizontales o verticales para medir y observar con exactitud sus distancias. Se reta a los alumnos a identificar un punto que falta, dado otro punto y una distancia específica, utilizando conceptos de geometría analítica. Además, el Sistema Tutorial

CoorCar permite diseñar los puntos específicos en el plano cartesiano, lo que ofrece más práctica y permite calcular distancias entre dos puntos.

### ***Sesión 4. Punto medio y puntos intermedios.***

Los alumnos, en la cuarta sesión, hallan el punto medio de un segmento en el plano cartesiano mediante la aplicación del Sistema CoorCar. Los estudiantes en esta actividad tienen la opción de emplear el Sistema Tutorial CoorCar que ofrece el punto medio, o pueden proponer sus propios segmentos y encontrar el punto medio correspondiente. El punto medio de un segmento se localiza en el centro de este segmento, dividiéndolo en dos partes iguales. Por otra parte, se destaca que rompe con lo habitual de un curso es la resolución de operaciones inversas; en este caso, el tutor proporciona un punto medio y los estudiantes tienen el reto adicional de encontrar los puntos que conforman el segmento original. Para conseguir esto, tienen que emplear sus conocimientos sobre geometría analítica y aplicar métodos de cálculo inverso para identificar los puntos necesarios.

Para concluir las actividades, se invita a los usuarios a calcular el punto intermedio de un segmento en el plano cartesiano. En este caso, tienen la opción de proponer los puntos que conforman el segmento o utilizar el Sistema CoorCar para que se les proporcionen los puntos y la razón necesaria para determinar el punto intermedio. Para calcular el punto intermedio, los usuarios pueden recurrir al menú de "ayuda" dentro del Sistema Tutorial CoorCar, donde encontrarán las fórmulas y los pasos necesarios para realizar el cálculo. Asimismo, los usuarios tienen la posibilidad de sugerir los puntos que conforman el segmento y, con base en ellos, emplear las fórmulas y métodos que brinda el Sistema CoorCar para determinar el punto medio correspondiente. En otras ocasiones, el Sistema CoorCar es capaz de producir puntos y ofrecer la justificación necesaria para definir el punto medio.

### ***Sesión 5. Postest***

Al finalizar las sesiones, se empleó un postest para evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes en el aprendizaje del plano cartesiano, distancia entre dos puntos y encontrar puntos medios e intermedios de un segmento. Este postest

mide el progreso y el impacto de las actividades en los estudiantes. Contiene preguntas sobre ubicar, reconocer puntos en el plano cartesiano, cálculo de distancias entre dos puntos, puntos medios e intermedios de un segmento. Al comparar sus resultados con el pretest se observa que los estudiantes lograron comprender cada uno de los conceptos aprendidos.

### Fase 2: Implementación

Se realizó una prueba piloto con un estudiante de octavo grado de secundaria, cuyo propósito fue afinar el diseño de las actividades de la versión definitiva de la investigación que se aplicaría a los estudiantes de octavo grado del Colegio Saint Margaret en Costa Rica. A partir de la revisión del pretest, las tres actividades y el postest, se ajustó la redacción de los ítems que generaban confusión, se eliminaron preguntas repetidas, se reescribieron algunas utilizando un lenguaje matemático distinto y se añadieron otras nuevas; asimismo, se actualizaron las guías con instrucciones paso a paso para el uso del Sistema Tutorial CoorCar, se rediseñaron los planos cartesianos de las guías de exploración y se estimaron con mayor precisión los tiempos de aplicación de las actividades.

Cobb y Koeno (2008), mencionan que es necesario llevar a cabo evaluaciones suplementarias al preparar un experimento, ya que las tareas utilizadas en muchos de los estudios previos reflejan la manera en que el campo de estudio está establecido en el entorno educativo.

### Experimentos de enseñanza

En el experimento de enseñanza que se llevó a cabo en el colegio privado Saint Margaret, ubicado en Costa Rica, Heredia, Belén, donde se implementaron estrategias y recursos pedagógicos con el objetivo de mejorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el tema de geometría analítica.

- 1. Población de estudio:** Un grupo de 10 estudiantes de un colegio privado en el nivel de octavo durante el II trimestre del 2022.
- 2. Implementación:** Se llevó a cabo de forma presencial en el laboratorio de cómputo del colegio y en cada computadora se instaló Sistema Tutorial CoorCar. Las actividades se realizaron

en 3 sesiones, con una duración aproximada de una a dos horas cada una. Los estudiantes trabajaron en forma individual y grupal durante las sesiones, el pretest y el postest se trabajaron de manera individual.

- 3. Diseño del experimento:** Consistió en 5 sesiones de trabajo, en la primera sesión se aplicó un pretest para evaluar el conocimiento inicial de los estudiantes. En las 3 sesiones siguientes se implementaron actividades relacionadas con ubicar, reconocer puntos en el plano cartesiano, determinar la distancia entre dos puntos, punto medio y puntos intermedios, al concluir las actividades, se aplicó un postest para medir lo aprendido por los estudiantes.
- 4. Rol del investigador-profesor:** Una investigadora-profesora a cargo de la enseñanza fue la encargada de dirigir y hacer más fácil el proceso educativo durante las actividades, proporcionando instrucciones, aclarando dudas y ofreciendo retroalimentación a los alumnos.
- 5. Recopilación de datos:** Se documentaron las hojas de exploración de los alumnos, en las que se reflejaban sus soluciones y respuestas a los problemas que se presentaron en la clase. Estas hojas de trabajo proporcionaron una visión detallada del proceso de pensamiento y el progreso individual de cada estudiante.

### Instrumentos

La recolección de información se desarrolló mediante la aplicación de un pretest, tres sesiones de trabajo y un postest. Los datos fueron depurados y analizados con estadística descriptiva, garantizando la confidencialidad de los participantes y el uso de la información con fines exclusivamente investigativos. La validez de contenido fue establecida mediante juicio de expertos integrado por doctores en Matemática Educativa, quienes revisaron y avalaron los instrumentos (pretest, actividades y postest).

### Resultados y discusión

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de un grupo de 10 estudiantes del colegio privado Saint Margaret, ubicado en Costa Rica,

Heredia, Belén, durante el II trimestre del 2022 que fueron sometidos a un pretest, tres actividades mediante el Sistema Tutorial CoorCar, siguiendo una metodología basada en la didáctica de Cuevas-Pluinage y finalmente, la aplicación de un postest con el fin de evaluar las intervenciones.

### Sesión 1

En el proceso de implementación del pretest, se llevó a cabo un exhaustivo análisis con el objetivo de evaluar de manera integral el rendimiento y la eficacia de la prueba preliminar, los datos obtenidos son los siguientes.

Tabla 1. Dificultades observadas en la aplicación del pretest.

Dificultad	Cantidad de estudiantes
Ubican números racionales en la recta numérica	5
Dificultades al sumar o simplificar fracciones homogéneas y heterogéneas	10
Reconocen puntos, rectas, semirectas, segmentos y rayos	5
Confunden rectas secantes con rectas perpendiculares	2
Identifican correctamente los cuadrantes del plano cartesiano	3
Ubican al menos un punto en el plano cartesiano	10

Fuente: Elaboración propia.

### Sesión 2

En esta clase, los alumnos emplearon el Sistema Inteligente CoorCar en sus ordenadores. Como parte del apoyo, recibieron hojas de exploración impresas. Este método permitió que los alumnos experimentaran de manera integral y participativa, explorando y utilizando de forma práctica los conceptos con el sistema y los materiales impresos proporcionados.

En la primera actividad, varios alumnos no consiguieron ubicar el origen del plano cartesiano y, por ende, tuvieron problemas para moverlo.

Además, encontraron dificultades para identificar números negativos en la línea recta y encontrar la hoja cuadriculada. En dos computadoras, también tuvieron problemas al intentar escribir números decimales en el Sistema CoorCar porque no permitía ingresar el punto o la coma. No obstante, pudieron utilizar el CoorCar de manera adecuada y posicionaron los puntos en pares ordenados tal como el sistema lo había indicado.

Los alumnos lograron interpretar y generalizar correctamente la ordenada y la abscisa, además de situar los puntos en el plano cartesiano después de utilizar CoorCar.

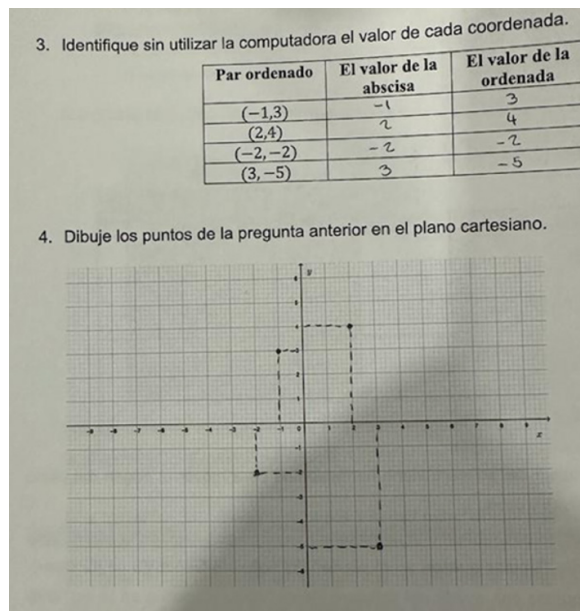


Figura 3. Estudiante 1: Ubicar puntos en el plano cartesiano y reconocer el eje de las abscisas y ordenadas.

Fuente: Elaboración propia.

### Sesión 3

En la actividad #2, los estudiantes dedicaron dos sesiones de una hora y media. Aunque enfrentaron

problemas técnicos con el Sistema CoorCar como el tiempo, problemas con las computadoras, lograron comprender correctamente la definición de distancia entre dos puntos.

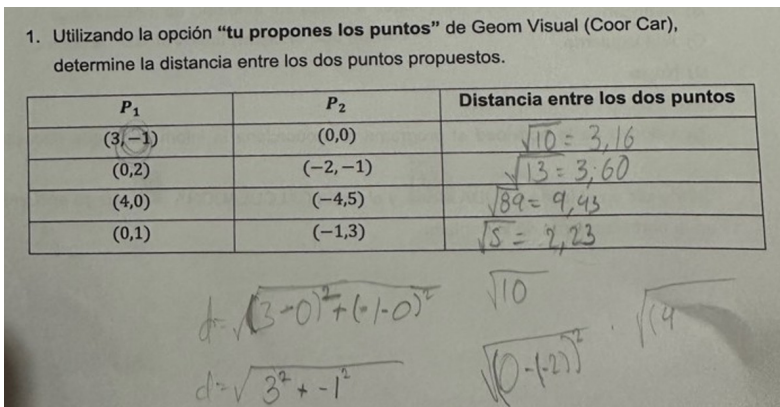


Figura 4. Calcular distancia entre dos puntos con el CoorCar.

Fuente: Elaboración propia.

En esta actividad, los alumnos utilizaron la fórmula de distancia entre dos puntos que el Sistema CoorCar les brindó, a la que accedieron por medio de la opción "ayuda". Asimismo, emplearon sus calculadoras científicas para llevar a cabo los cálculos requeridos. Las representaciones mostraron diferentes maneras de proceder: unos alumnos decidieron emplear todos los decimales

que la calculadora les daba, mientras que otros restringieron su respuesta a dos decimales o calcularon primero la raíz cuadrada y después ofrecieron un cálculo aproximado (ver figura 5). Esta diversidad de perspectivas demuestra cómo los alumnos son capaces de adaptarse y ser flexibles al usar las herramientas disponibles para solucionar problemas matemáticos.

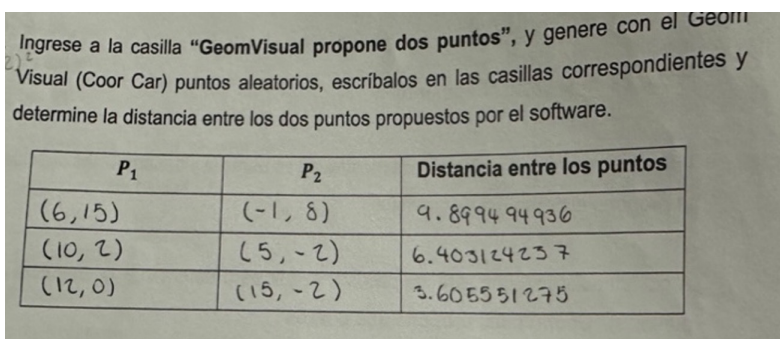


Figura 5. Estudiante 1: Generar los puntos del Geom Visual para calcular distancias.

Fuente: Elaboración propia.

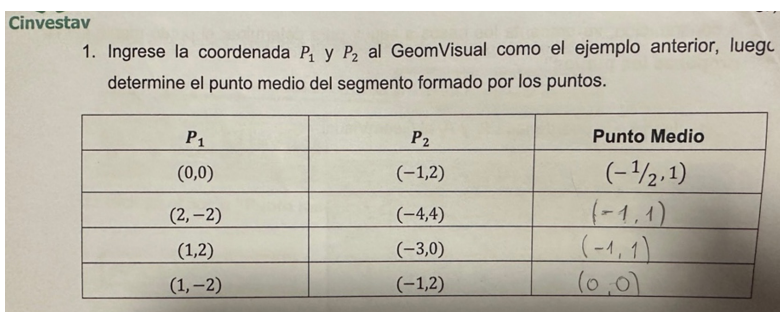


Figura 6. Punto medio con el CoorCar de Geom Visual.

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 7, se observa que los estudiantes calculaban el punto medio con apoyo del CoorCar. Luego, reconocían la abscisa y ordenada del

par ordenado de manera correcta. Ninguno tuvo problemas al escribir los pares ordenados ni al reconocer lo solicitado.

Ingrese a la casilla "GeomVisual propone dos puntos", y genere con el GeomVisual (Coor Car) puntos aleatorios, escribalos en las casillas correspondientes y determine la distancia entre los dos puntos propuestos por el software.

$P_1$	$P_2$	Distancia entre los puntos
(6, 15)	(-1, 8)	9.899494936
(10, 2)	(5, -2)	6.403124237
(12, 0)	(15, -2)	3.605551275

Figura 7. Sistema CoorCar y el punto medio de un segmento.

Fuente: Elaboración propia.

## Sesión 5

Los resultados de la aplicación del postest fueron satisfactorios, ya que los estudiantes comprendieron temas como ubicar puntos en el plano cartesiano, determinar la distancia entre dos puntos y el punto medio de un segmento.

Con el apoyo del Sistema Tutorial CoorCar, los alumnos contestaron correctamente las preguntas planteadas, lo cual demostró la utilidad de la herramienta para reforzar y aplicar en práctica los conocimientos adquiridos. Los estudiantes lograron reconocer los cuadrantes del plano cartesiano como los ejes de las ordenadas y abscisas, así como los pares ordenados y las distancias, ya sean horizontales o verticales, dentro de dicho plano. Fue fundamental adoptar diversas estrategias para guiar la concepción y el desarrollo de las guías de exploración. Los experimentos brindaron información precisa, permitiendo así analizar cómo impactaban las estrategias pedagógicas que se implementaron. Basándonos en los principios de la didáctica Cuevas-Pluinage, se fundamentaron las decisiones en la creación de actividades y recursos educativos. Durante la propuesta didáctica se ejecutó un entorno de aprendizaje dinámico entre los estudiantes, se observó la participación, interacción y comprensión por parte de los estudiantes. También, al través del Sistema Tutorial CoorCar los alumnos lograron aprender y realizar las actividades en un entorno seguro.

## Conclusiones

La implementación del Sistema Tutorial CoorCar resultó satisfecho para el docente y los estudiantes, este método permitió a los estudiantes explorar respuestas y recibir retroalimentación instantánea y un informe detallado de sus errores cometidos en la actividad. Proporcionando un aprendizaje individualizado y que cada estudiante asimilara los conceptos a su propio ritmo y capacidad. Además, los estudiantes utilizaban el Sistema Tutorial CoorCar para repasar los contenidos antes de abordar conceptos de geometría analítica. Durante cada intervención se detectaron dificultades entre los estudiantes con respecto al tema de puntos intermedios, aunque los estudiantes recibieron explicaciones claras y participaron en las actividades diseñadas muchos de ellos enfrentaron problemas para comprender el tema de puntos intermedios ya que para la comprensión del contenido se requiere conceptos previos como fracciones, razones, el plano cartesiano y la distancia entre dos puntos. Si los estudiantes no dominaban estos conceptos presentaban algunas dificultades para aplicarlos en el tema de puntos intermedios.

Por otra parte, la diferencia de ubicar puntos en el plano cartesiano, los puntos intermedios requieren un razonamiento más abstracto. Además, se evidencia que los estudiantes reconocen en el plano cartesiano el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas, crucial para avanzar en este tema. Otro desafío en los estudiantes fue ubicar en el plano

cartesiano el punto el origen en el Sistema Tutorial CoorCar. También, se detectó la problemática en la correcta disposición de números negativos en la recta numérica y el uso apropiado en la hoja cuadrícula del CoorCar en trasladar puntos. Lo que indica que proporcionar recursos y estrategias ayudan a entender los conceptos.

Una característica positiva es la capacidad de los estudiantes en colocar puntos de forma precisa en pares ordenados, según las indicaciones del Sistema Tutorial CoorCar de geometría analítica.

Esto evidencia que son capaces de usar con efectividad lo que saben sobre el sistema de coordenadas cartesianas en un contexto digital.

Por último, el postest proporcionó una evaluación exhaustiva del nivel de comprensión y la adquisición de habilidades matemáticas por parte de los estudiantes. Los hallazgos mostraron un efecto positivo en el aprendizaje de geometría analítica, evidenciando un mejor desempeño y una confianza más alta al aplicar los conceptos estudiados.

Si bien, la tecnología no es la solución al grave problema de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la creación e implementación de sistemas tutoriales desarrollados bajo una propuesta didáctica específica, en trabajo conjunto con el docente puede producir en los estudiantes una promoción en la comprensión de conceptos matemáticos.

### Limitaciones

El tamaño muestral reducido limita la generalización de los resultados; se trabajó en un solo contexto (colegio privado, octavo año, Costa Rica), por lo que los hallazgos podrían variar en otros niveles o tipos de centro; el diseño pre-post sin grupo de comparación impide atribuir con certeza los cambios exclusivamente a la intervención; y se utilizó únicamente el sistema tutorial CoorCar como apoyo tecnológico, lo que restringe la comparación con otras herramientas o enfoques didácticos.

Por último, para investigaciones futuras se recomienda ampliar la muestra e incluir centros públicos y privados, zonas urbanas y rurales y distintos niveles escolares para mejorar la validez externa; además, comparar CoorCar con otras

alternativas como clase tradicional, GeoGebra u otros sistemas tutoriales.

### Referencias

Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 203-217. <http://funes.uniandes.edu.co/9623/>

Acuña, C. (2005). ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(1), 7-23. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508102>

Álvarez, G. (2009). Una experiencia didáctica del uso de la tecnología en el aula: aplicación del sistema tutorial LIREC en un curso de geometría analítica en el nivel media superior. [Tesis de maestría, Cinvestav-IPN].

Aravena, A y Morales, A. (2018). El Plano Cartesiano en estudiantes de Quinto Básico: su Resignificación en una Situación Específica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 825-846. <https://www.redalyc.org/journal/2912/291265266005/html/>

Carbajal, A. (2013). Una Propuesta de enseñanza de lugar geométrico, el caso de la línea recta. [Tesis de maestría, Cinvestav-IPN]. <https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1000>

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2017). Conducting design studies to investigate and support mathematics students' and teachers' learning. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 208–233). *National Council of Teachers of Mathematics*.

Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM). (2000). Principles and Standards for School Mathematics.

Cuevas, C. y Mejía, H. (2003). Cálculo visual. Oxford.

Cuevas-Vallejo, C. A., y Hernández González, I. E. (2023). Diseño y construcción de una plataforma

virtual de apoyo a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *El cálculo Y Su enseñanza*, 19(2), 15–33. <https://doi.org/10.61174/recacym.v19i2.210>

Cuevas, C., y Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action pratique: Éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8, 273–293.

Cuevas, C., y Pluvinage, F. (2009). Cálculo y tecnología. *El Cálculo y su Enseñanza*, 1(1), 45–60. <https://doi.org/10.61174/recacym.v1i1.164>

Cuevas, C. (2011). CARTESIANA-COORCAR. Sistema Tutorial Inteligente para la enseñanza de las coordenadas cartesianas y segmentos de línea para un curso de Geometría Analítica. Uso nivel básico, medio superior y superior, implementado en una microcomputadora tipo PC. [Software registrado, Reg. 03-2012-012310090600-01]. México.

Cuevas, C. y Martínez R., M. (2013). Un modelo para la construcción de entornos didácticos educativos para la enseñanza de las matemáticas. La enseñanza del cálculo diferencial e integral compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en *Matemática Educativa* (159-174). Editorial Pearson ISBN:978-607-32-2310-2.

Cuevas, C., Delgado, M. y Martínez, M. (2018). Propuesta para introducir el pensamiento funcional y el concepto de función real de un curso de cálculo diferencial. *Revista logos ciencia y tecnología*, 10(2), 20-38. <https://doi.org/10.22335/rict.v10i2.557>

Cuevas, C. (2019). Vida y Matemáticas 2. Matemáticas Secundaria (272). E. Ríos de tinta S. A. de C. V. ISBN 978-607-8495-2-8, México.

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. En Linda Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*. 121-139. Routledge.

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio en Matemática para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. <https://www.mep.go.cr/programa-estudio/matematicas>

Ospina, M., Suarez-Castrillon, A, Espinoza-

Morales, G., y Jaimes-Sandoval, N. (2016). Uso de las TIC despierta una mayor motivación que con la no inclusión de las mismas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. *Revista Ingenio*, 9(1), 101–119. <https://doi.org/10.22463/2011642X.2071>

Pérez, H. (2022). Una propuesta didáctica para promover el razonamiento variacional-covariacional en estudiantes de secundaria con apoyo de la tecnología digital. [Tesis de maestría, Cinvestav-IPN].

Polania, J., Córdoba, M., y López, L. (2015). Uso de las TIC por parte de los profesores. Estado del Arte (2009-2015). *Revista Facultad De Ciencias Contables Económicas Y Administrativas (FACCEA)*, 5(1), 84–93. <https://doi.org/10.47847/facce.v5n1a4>

Tello, C., Moreno, Y., Cáceres, M., y Vargas, I. (2016). Aplicación unidad didáctica “distancia entre dos puntos”. *Encuentro Distrital de Educación Matemática*, 3, 206-215. <http://funes.uniandes.edu.co/9965/1/Tello2016Aplicaci%C3%B3n.pdf>

Torres, V. (2017). Aplicación del Software GeoGebra para el mejoramiento del aprendizaje de la geometría analítica en estudiantes del segundo ciclo, Escuela Profesional de Administración y Negocios Internacionales de la Universidad Alas Peruanas, Lima. 2016. [Tesis de doctorado, Universidad Alas Peruanas].

Valencia, E (2020). Distancia entre dos puntos, sus dificultades por escala errónea y su aplicación en el teorema de Pitágoras. <https://www.joom.org.mx/files/JOOM%203.pdf#page=19>

Zamora, J. et al. (2020). Uso De Herramientas Tecnológicas Y Su Impacto En El Rendimiento En El Curso De Cálculo II de la Universidad Nacional. *Eco Matemático*, 11(1), 20-30. <https://doi.org/10.22463/17948231.2952>