

## Análisis contra el tiempo para presas mediante implementación numérica usando elementos finitos

C.H. Flórez G.<sup>1</sup>

### Resumen

*El análisis de las presas de gravedad ha experimentado variaciones e implementación de teorías matemáticas y físicas para hacer cada vez mas seguro el diseño de las mismas. Este artículo plantea una generalización a la solución de las ecuaciones del sólido deformable por el método de los elementos finitos con aplicación a presas de gravedad. Esta solución tiene una relación directa con la solución computacional utilizada por programas comerciales de elementos finitos tales como Abaqus u otros de uso progresivo en la ingeniería. Finalmente, se presentan tres ejemplos de análisis contra el tiempo para distintas presas y diversos autores.*

**Palabras clave:** Presa, sólido deformable, elemento finito.

### Abstract

*Analysis of gravity dams has undergone changes and implementation of mathematical and physical theories to make sure more and more of the same design. This article presents a generalization to the solution of the equations of deformable solid by finite element method with application to gravity dams. This solution has a direct relationship with the computational solution used by commercial finite element programs such as Abaqus or other progressive use in engineering. Examples are given of analysis obtained by different investigators.*

**Key words:** Dam, solid deformable, finite element.

### Introducción

Las presas son tan antiguas como el hombre. Estas estructuras que han servido para múltiples propósitos tienen una interesante historia en lo que respecta al cálculo y construcción de las mismas. Hombres y animales se disputan el honor de ser los grandes constructores de presas a través de la historia.

### Concepto de presa

Se denomina presa a una barrera física, artificial, construida con materiales térreos o en concreto hidráulico o compactado con rodillo, cuya finalidad es contener un volumen de agua en el curso de un río para aprovechamientos diversos en ingeniería. Estructuralmente las presas pueden ser de gravedad o de arco. En las primeras, el peso propio de la presa soporta el empuje hidráulico

<sup>1</sup> Ingeniero Civil UFPS. Especialista en Física UFPS. Magister en Ingeniería Área Geotécnia Universidad de los Andes. Grupo de Investigación en Geotecnia Ambiental, GIGA. Departamento de Geotecnia y Minería. Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia. chflorez@bari.ufps.edu.co.

y en las segundas, este empuje es resistido por la geometría de la presa.

## Evolución histórica de las presas

Históricamente se tiene conocimiento de presas que datan desde la antigüedad. En el antiguo Egipto se construyeron diversas presas para desviar las aguas del río Nilo en Menfis. Las más antiguas se referencian desde el año 4.000 a. C. Un ejemplo es la presa construida por Menes que poseía una altura de 15 metros, elaborada con materiales térreos y se mantuvo vigente durante unos 45 siglos [1]. También se encuentran vestigios de canales en la mesopotamia (730-690 a.C.). En México (750 a.C. y 1500 a.C.) se tiene conocimiento de la presa de Purrón, con una altura de 18 metros. En la época del renacimiento se construyeron un gran número de presas de mayor altura todas ellas sobre bases empíricas. Hasta la época de la primera revolución industrial no se dispone de los fundamentos teóricos (físicos y matemáticos) para proyectar las presas bajo un mínimo rigor científico. En la actualidad, las presas deben diseñarse para soportar las grandes tensiones transmitidas por efecto del empuje hidráulico y soportar de manera eficiente cargas aleatorias como las inducidas por los sismos. Al igual que el hombre, existe en el reino animal los llamados “ingenieros de ecosistemas” y entre ellos, el *castor fiber* y *castor canadensis*, ejemplos de la ingeniería alogénica, entendida como aquella que es capaz de cambiar el medio ambiente transformando material viviente y no viviente de un estado físico a otro a través de medios mecánicos y otros medios [2]. Los castores son animales famosos por haber construido presas muy largas. La más larga que se conoce fue descubierta cerca de Three Forks, Montana, en Estados Unidos de América (USA, por su sigla en inglés), y medía unos 652 m de largo, 4 m de altura y 7 m de grosor en la base [3]. Lo anterior ha demostrado que la construcción de presas no ha sido una actividad exclusiva de seres humanos.

## Evolución de los conceptos estructurales en el análisis de presas

En la historia de la ingeniería de presas, el cálculo de tensiones ha ocupado la mayor preocupación. La evolución del cálculo de tensiones en presas

inicia con el método de Pigeaud, posteriormente pasa por el método de las hiladas horizontales hasta llegar a los métodos numéricos tal como el método de los elementos finitos (MEF) iniciado por la ingeniera soviética Faadeva.

El método de Pegeaud surge en la primera mitad del siglo XX, apoyado en ecuaciones elementales de equilibrio estático. Pegeaud suponía que la presa debe analizarse por rebanadas verticales de un metro de ancho con fuerzas actuando en el plano medio en estado elástico plano. El cálculo se hace sobre el nivel máximo del embalse o con embalse vacío, sin situaciones intermedias, ni sobre elevaciones accidentales, lo cual implica una limitación del método [4]. Un método posterior fue el de las Hiladas Horizontales, el cual partía de dos hipótesis básicas: Por un lado, la deformación plana de las secciones horizontales y por otro, el estado plástico plano en un plano axial vertical, esto explica que todos los puntos de una recta normal a ese plano axial tiene idénticas tensiones. Los dos métodos anteriores no resolvían el problema de las tensiones producidas en la base o roca de cimentación, ya que ésta se deformaría según sus propias leyes y su deformación en cada punto no coincidiría con la ley plana supuesta, es decir, los resultados en una sección común no eran concordantes. Un planteamiento correcto de las condiciones de contacto implicaba la igualdad de tensiones en cada punto, así como la igualdad en los desplazamientos. La formulación analítica suponiendo igualdad de tensiones en cada punto de la estructura e igualdad en los desplazamientos da lugar a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que puede resolverse de manera aproximada mediante métodos numéricos [5] como el método de los elementos finitos. El análisis de presas por elementos finitos inicia con la ingeniera soviética Faadeva, quien en 1958 propuso dividir la presa y el cimiento en elementos rectangulares. Dos años antes el grupo de Turner en el MIT, desarrollaron otro método aplicado a estructuras aeronáuticas, posteriormente adoptado a las presas por el grupo de Zienkiwicz y Cheung en el año 1964. Todos estos métodos se fundamentan en la solución del problema de equilibrio de un elemento diferencial de volumen o sólido deformable, sobre el cual se examinan las fuerzas que actúan sobre dicho volumen.

## Materiales y métodos

### Ecuaciones del sólido deformable

El método de solución de las ecuaciones del sólido deformable consistió en hallar el equilibrio de un cubo o volumen elemental, sobre el cual se examinan los diferentes esfuerzos que actúan sobre tal volumen. Dado que los esfuerzos se pueden aplicar en una dirección arbitraria, estos se separan en componentes normales y tangenciales a los planos principales del elemento diferencial de volumen [4]. Al considerar el elemento diferencial infinitesimal de volumen, se establece que en las caras actúan esfuerzos normales y de corte y se supone que las componentes de la fuerza gravitacional (fuerzas de cuerpo),  $g$ , que actúan sobre el elemento están dadas por  $g_x$ ,  $g_y$  y  $g_z$  en las direcciones  $x$ ,  $y$ , e  $z$  respectivamente. Las fuerzas que actúan sobre el elemento en esas mismas direcciones corresponden a las fuerzas normales y fuerzas de corte. La ecuación (1) muestra en notación tensorial la sumatoria de estas fuerzas:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = f_i \quad (1)$$

$\sigma_{ik}$  representa un tensor de segundo orden.

Para problemas estructurales donde se requiera análisis contra el tiempo, se hace uso del comportamiento mecánico del sólido elástico, el cual es descrito en la ecuación (2). Esta ecuación representa la segunda ley de Newton, es decir, el sólido elástico deformable se encuentra en equilibrio dinámico. [6]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma_s(u) \quad (2)$$

En el concepto generalizado de deformación de Cauchy, se considera los desplazamientos  $\mathbf{u} = (u, v \text{ y } w)$ , que representan el campo vectorial de desplazamiento del cuerpo según los ejes  $x$ ,  $y$  e  $z$ . [7]. La ecuación (3) muestra en forma tensorial el campo de desplazamientos:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

La ley de Hooke generalizada establece una relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones, expresado bajo la notación del tensor infinitesimal de Green-Cauchy. La ecuación (4) es una representación tensorial de la relación tenso-deformacional.

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4)$$

Las soluciones analíticas de estos sistemas de ecuaciones se logran para configuraciones simples pero en la práctica se recurre normalmente a métodos de cálculo numérico, tales como el método de diferencias finitas, método del punto material (MPM) que es un método numérico Lagrangiano de “partículas-malla”, utilizado para modelar la dinámica de problemas de grandes desplazamientos y localización de deformaciones [8]. Otro método, tal como el método de los elementos finitos (MEF) representa una alternativa para la solución de problemas tanto en pequeñas como en grandes deformaciones para análisis contra el tiempo, siendo la primera, nuestro marco de interés.

### Solución de las ecuaciones del sólido deformable por el método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos es un procedimiento general de discretización de los problemas continuos planteados por expresiones definidas matemáticamente:

- El continuo se divide en un número finito de partes (elementos), cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros y
- la solución del problema completo como ensamblaje de los elementos sigue las mismas reglas que se aplican a los problemas discretos tipo [9].

Los elementos finitos se definen de tal forma que utilizan un conjunto de funciones de interpolación que proporcionan las variables incógnitas de

cualquier punto del elemento considerado a partir de los correspondientes valores de los puntos nodales.

Estas funciones de interpolación son llamadas funciones de forma  $N_k$  y se definen para cada elemento finito tipo, "en el que si un sistema de coordenadas  $x$ , representa las coordenadas de los puntos nodales, se tiene la relación:

$$x = \sum N_k X_k, k= 1, \dots, n$$

Análogamente para los desplazamientos  $U$  (ecuación 5), velocidades  $\dot{U}$  (ecuación 6) y aceleraciones  $\ddot{U}$  (ecuación 7) de un punto cualquiera del elemento en función de los valores nodales  $a_k, \dot{a}_k, \ddot{a}_k$  se puede escribir respectivamente:

$$U = \sum N_k a_k \quad (5)$$

$$\dot{U} = \sum N_k \dot{a}_k \quad (6)$$

$$\ddot{U} = \sum N_k \ddot{a}_k \quad (7)$$

Partiendo de un principio físico como el de los trabajos virtuales o el de minimización de la energía potencial es posible relacionar las deformaciones de un punto interior del elemento con los desplazamientos nodales; el sistema de ecuaciones obtenidos, así, expresa el equilibrio entre fuerzas exteriores e internas en función de los parámetros de los nodos (ecuación 8), de manera matricial;

$$[M]a + [C]\dot{a} + [K]a = f \quad (8)$$

Donde,

$$a \equiv \frac{d}{dt}a ; \ddot{a} \equiv \frac{d^2}{dt^2}a \quad (9)$$

Todas las matrices se obtienen ensamblando las submatrices elementales según el procedimiento clásico. La matriz  $M_j^e$  se conoce como matriz de masa de un elemento y la matriz  $C_j^e$  se denomina matriz de amortiguamiento consistente [9], las cuales se expresan en ecuaciones (10) y (11).

$$C_{ij}^e = \int_{V^e} N^T \mu N dV \quad (10)$$

$$M_{ij}^e = \int_{V^e} N^T \rho N dV \quad (11)$$

Las submatrices  $K^e$  matriz de rigidez y  $f^e$  matriz de fuerzas externas se definen por relaciones siguientes, expresadas en ecuaciones (12) y (13):

$$K^e = \int B^T D B d(vol) \quad (12)$$

$$f^e = -\int_{V^e} N^T H (vol) - \int_{V^e} B^T D \varepsilon_0 d(vol) + \int_{V^e} B^T \sigma_0 d(vol) \quad (13)$$

En la ecuación (13) los tres términos representan las fuerzas debidas respectivamente a las fuerzas masicas, las deformaciones y tensiones iniciales [9].  $B$  representa el tensor de deformaciones cuyas expresiones se dan en función de los desplazamientos.  $D$  es la matriz de elasticidad que contiene las propiedades del material.

Este sistema de ecuaciones, así compuesto (Ecuación (8)) es la base del cálculo dinámico de estructuras mediante el método de los elementos finitos.

En el campo de las presas son prioritarias las siguientes dos consideraciones:

Para elaborar el modelo geométrico de la presa es fundamental el empleo de un algoritmo que ayude a su discretización, así como herramientas de representación grafica del modelo a efectos de detectar posibles errores.

Imprescindible la determinación correcta de los parámetros del modelo que no son siempre fáciles de obtener. (por ejemplo, la determinación del modulo de elasticidad  $E$  que en principio varia con el tiempo y no tiene porque ser homogéneo ni isótropo en toda la presa) [10].

El método de solución de estas ecuaciones consiste en escribir las ecuaciones de equilibrio para un cierto tiempo  $t$ :

$$\psi(d^t) = f^t - p^t(d^t) = 0 \quad (14)$$

Donde  $\psi(d^t)$  es el vector de las fuerzas residuales. Para un incremento de tiempo  $\Delta t$  se puede colocar de forma incremental:

$$\Delta p^t(d^t) = \frac{\partial p}{\partial d} d^{t-\Delta t} * \Delta d^t \quad (15)$$

Llamando  $\left(\frac{\partial p}{\partial d}\right) d^{t-\Delta t} * k_T^{t-\Delta t}$  matriz de rigidez tangente o matriz Jacobiana de las fuerzas internas. Para un cierto instante  $t$  quedaría:

$$\Delta p^t(d^t) = k^{t-\Delta t} * \Delta d^t \quad (16)$$

Teniéndose así un sistema de ecuaciones lineales que deben resolverse para cada incremento de tiempo:

$$k_T^{t-\Delta t} * \Delta d^t = \Delta f^t \quad (17)$$

Obteniéndose la solución actualizada en un tiempo  $t$  como:

$$d^t = d^{t-\Delta t} + \Delta d^t \quad (18)$$

Para corregir errores y deficiencias del procedimiento los programas de elementos finitos recurren al procedimiento de Newton Rapspon que resuelven sistemas de ecuaciones no lineales mediante un método incremental relativo en el que se dispone de una solución aproximada  $d_i^t$  a la solución exacta  $d^t$ . Otras soluciones utilizan el desarrollo de las series de Taylor truncando en los términos de primer orden [11].

## Analisis dinámico

Diversos programas comerciales pueden utilizarse para llevar a cabo análisis de tipo dinámico mediante la técnica numérica de elementos finitos. Entre los más versátiles se encuentran Abaqus®, Ansys® y Sap®. En la versión del programa Abaqus 5.6 los análisis dinámicos se ejecutan en dos pasos. El primer paso realiza un análisis estático de la presa para condición de peso propio y empuje hidrostático. El segundo paso realiza un análisis dinámico por el método de reducción con el fin de ahorrar memoria computacional.

Se explica a continuación el proceso de análisis explícito en Abaqus5.6

## Procedimiento Analítico

El análisis dinámico explícito es computacionalmente eficiente para análisis de modelos grandes con respuestas dinámicas cortas en el tiempo y se considera eficiente para la teoría de grandes deformaciones y demás análisis. El procedimiento dinámico explícito permite procesar un gran número de pequeños incrementos de tiempo, usando la regla de la diferencia central para el tiempo de integración explícita [12]. Cada incremento es relativamente “económico” si se compara con el análisis de integración directa que ejecuta el Abacus/Standard, dado que no existe una solución para un set de ecuaciones simultaneas. El operador de la diferencia central implícita satisface la ecuación de equilibrio dinámico al comienzo del incremento  $t$ ; las aceleraciones calculadas en el tiempo  $t$  son usadas al avanzar en la solución del tiempo  $t + \frac{\Delta t}{2}$  (velocidad) y en la solución del desplazamiento en el tiempo  $t + \Delta t$ .

## Implementación Numérica

El procedimiento del análisis dinámico explícito esta basado sobre la implementación de una regla de integración explícita utilizando términos de la diagonal de la matriz de masa. La ecuación de movimiento para un cuerpo esta integrado, haciendo uso de la regla de diferencia central de la integración explícita [13]:

$$\mu^N \left( i + \frac{1}{2} \right) = \mu^N \left( i - \frac{1}{2} \right) + \Delta t(i+1) + \frac{\Delta t_i * \mu^N(i)}{2} \quad (19)$$

$$\mu^N(i+1) = \mu^N(i) + \Delta t(i+1) \mu^N \left( i + \frac{1}{2} \right) \quad (20)$$

En las ecuaciones (19) y (20)  $\mu$  representa el grado de libertad (un computador del desplazamiento o la rotación) y el subíndice  $i$  es el número de incrementos en un paso dinámico.

El operador de la integración por diferencia central es explícito en el sentido que, el estado cinemático es calculado usando los valores conocidos de

$$\mu^N \left( i - \frac{1}{2} \right) \text{ y } \mu^N \text{ de los incrementos previos [14].}$$

La regla de integración implícita es completamente simple pero ella misma no posee una eficiencia computacional asociada con los procedimientos dinámicos explícitos. La “clave” para una eficiencia computacional de un procedimiento es el uso de los elementos de la diagonal de la matriz de masa, dado que, la aceleración al comienzo del incremento está computado por:

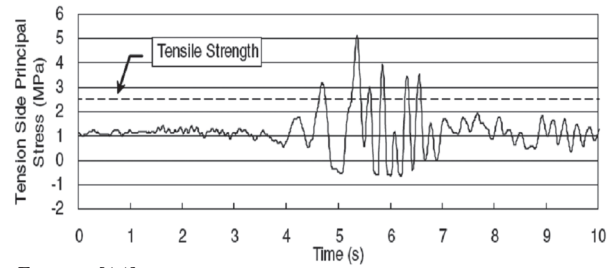
$$\mu^N_{(i)} = (M^{NJ-1})(P_{(i)}^J - I_{(i)}^J) \quad (21)$$

Donde  $M^{NJ}$  es la matriz de masa,  $P^J$  es el vector de cargas aplicadas e  $I^J$  es el vector de las fuerzas internas.

## Resultados

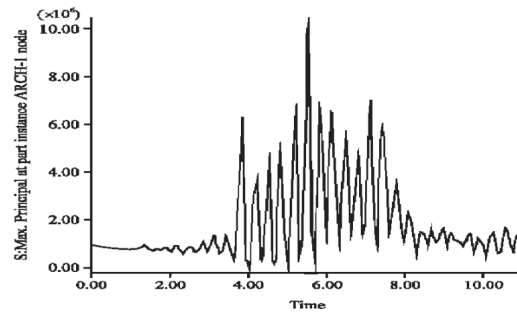
Se presentan como resultados tres ejemplos de investigaciones de análisis contra el tiempo en distintas presas. Los resultados obtenidos por el grupo de Sasaki en un análisis dinámico para la estimación de daños en una presa de gravedad [14] se muestran en la figura 4, historia de tensiones contra el tiempo en una presa de gravedad para analisis dinámico lineal. El trabajo de Lotfollahi [15] en un análisis dinámico para una presa de arco en concreto se muestra en la figura 5, historia temporal del máximo esfuerzo en el punto medio de la cresta. Finalmente se muestran dos variaciones temporales de los esfuerzos de compresión (figura 6) y esfuerzo de cortantes (figura 7) para el set de elementos de la presa Platanovryssi [10]. Los resultados anteriores, respuestas contra el tiempo, indican explícitamente que el estado tensional de la presa no es constante en el tiempo de duración de la señal que se introduce y esta variación real debe permitir que el análisis dinámico se oriente más hacia el análisis de deformación del material que hacia el cálculo de un factor de seguridad. Igualmente, las referencias dadas muestran la gran utilidad del método de los elementos finitos al permitir mediante análisis dinámico explícito proporcionar respuestas que serían imposibles obtener mediante análisis clásico de tensiones.

Figura 4. Historia de tensiones contra el tiempo en una presa de gravedad para análisis dinámico lineal.



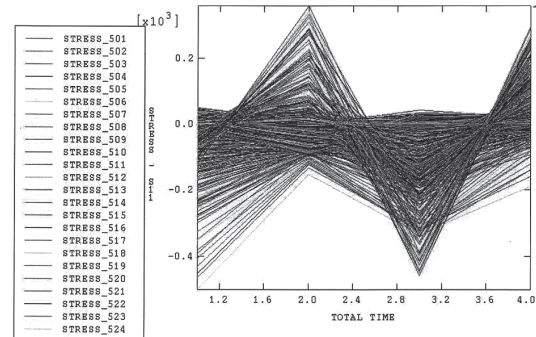
Fuente: [14]

Figura 5. Historia temporal del máximo esfuerzo en el punto medio de la cresta de una presa de arco en virtud de análisis dinámico.



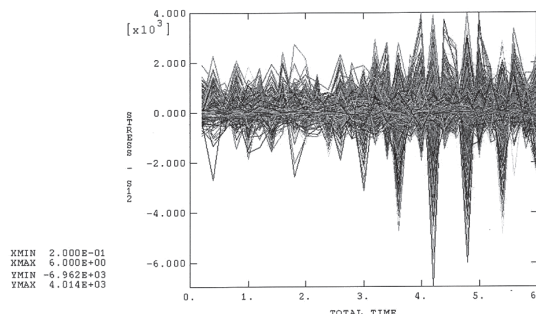
Fuente: [15]

Figura 6. Historia de los esfuerzos de compresión contra el tiempo para el set de elementos de la presa Platanovryssi.



Fuente: [10]

Figura 7. Historia de esfuerzos cortantes contra el tiempo presa para el set de elementos de la presa platanovryssi.



Fuente: [10]

## Conclusiones

La solución de ecuaciones diferenciales que modelan problemas de estado tensional en el tiempo tiene una potente ayuda en los métodos numéricos. El método de los elementos finitos propone una solución por el método de reducción con el fin de ahorrar memoria computacional, dada la gran cantidad de memoria que debe consumirse para un modelo dinámico.

Los resultados obtenidos en la modelación dinámica permiten establecer la variación del estado de esfuerzos contra el tiempo, demostrándose que, el estado tensional no es constante en el intervalo de duración de la señal, representada por una fuerza externa aleatoria. Este resultado sería improbable obtenerlo mediante un análisis clásico de la ingeniería estructural.

El método de los elementos finitos permite análisis complejos, como los análisis de estabilidad estructural en presas, tanto en modelos estáticos como dinámicos, de carácter lineal o no lineal, logrando establecer un mejor conocimiento del comportamiento del material, de su estado tenso-deformacional en el tiempo y disminuyendo los niveles de incertidumbre que se presentan bajo soluciones estructurales de carácter analítico.

## Bibliografía

- [1] L.E. Santaella y L.Y. Morales. Conceptos básicos en presas. Revista Ciencia e ingeniería Neogranadina. ISSN.1909-77350. Numero 011. p-27-34, Bogota, Colombia, Diciembre, 2001. en <http://148.215.1.166:89/redalyc/pdf/911/91101105.pdf>
- [2] Jones C.G. Lawton. J H, Shachak M. Organism as ecosystem engineers. 1994. *Oikos* 69: 373-386
- [3] The Beaver, Castor Canadensi. Consultado en <http://www.rhodyman.net/rebeaver.html>.
- [4] Crempien L, J.E. Tensiones y deformaciones en presas gravitacionales de hormigón bajo acción sísmica considerando interacción fluido estructura. Mecánica computacional- Vol. XII. Argentina, 2003. Consultado en <http://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/747/707>. Consultado 16/08/09.
- [5] Muller, M et al. Interaction of fluids with deformable solid. En <http://graphics.ethz.ch/~mattmuel/publications/casa2004.pdf>. Consultado 10/09/09.
- [6] L.A. Moreno R., y F. Cruz G. Propiedades físicas de los materiales. En <http://www.esfm.ipn.mx/~fcruz/ADR/Cristalografia/Tensores-2006.pdf>
- [7] Sarria, A. Ingeniería sísmica. p-97. Ed. Uniandes 2ª edición. Bogotá, 1995.
- [8] Zabala F, Rodari R y Oldecop L, Análisis dinámico de presas de materiales sueltos utilizando un método de partículas Lagrangianas. En <http://www.cadp.org.ar/docs/congresos/2008/87.pdf>. Consultado 16/08/2009
- [9] Zienkiewicz O.C. El método de los elementos finitos. p-3. Ed. Reverte, 1982.
- [10] Florez G, C.H. Análisis tridimensional contra el tiempo aplicado a la presa Platanovryssi (CCR). Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Bogota, 1997.
- [11] Hibbit, Karlson and Sorensen. "Abaqus post User's Manual Ver.5.6. De. HKS, 1996.
- [12] Hibbit, Karlson and Sorensen. "Abaqus Estándar User's Manual Ver.5.6. De. HKS, 1996.
- [13] Hibbit, Karlson and Sorensen. "Abaqus Theory Manual Ver.5.6. De. HKS, 1996.
- [14] Sasaki, T. et al. Simple estimating method of damages of concrete gravity dam based on linear dynamic analysis. 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering Vancouver, B.C, Canada, August 1-6, 2004. Paper No 128. Consultado en <http://www.pwri.go.jp/eng/activity/pdf/reports/sasaki-takashi040731.pdf>
- [15] M.A. Lotfollahi and M.A. Hesari. Dynamic Analysis of the arch concrete dam under earthquake force with ABAQUS. *Journal of Applied Sciences* 8(15): 2648-2658 ISSN 1812-5654. Asian Network for Scientific Information, 2008. Consultado en <http://scialert.net/qredirect.php?doi=jas.2008.2648.2658&linkid=pdf>. 16/08/09