

## Desarrollo de una estrategia de control basado en ADRC, aplicada a un sistema de bola y viga

Development of a control strategy based on ADRC, applied to a ball and beam system

MSc. Faber Orlando Diaz-Garcés<sup>1</sup>, MSc. Fernando Jesús Regino-Ubarnes<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Consejo superior de investigaciones científicas, instituto de ciencia y tecnología de polímeros, España, [orcid.org/0000-0002-3970-0560](https://orcid.org/0000-0002-3970-0560), Email: [fidiaz005@ikasle.ehu.es](mailto:fidiaz005@ikasle.ehu.es)

<sup>2</sup>Universidad Nacional de Colombia, Colombia, [orcid.org/0000-0003-0414-8654](https://orcid.org/0000-0003-0414-8654), Email: [fjreginou@unal.edu.co](mailto:fjreginou@unal.edu.co)

Como citar: F. O. Díaz y F. J. Regino, "Desarrollo de una estrategia de control basado en ADRC, aplicada a un sistema de bola y viga", *Revista Ingenio*, vol. 17, n°1, pp.15-20, 2020, doi: <https://doi.org/10.22463/2011642X.2391>.

Fecha de recibido: 17 de julio de 2019  
Fecha aprobación: 14 de noviembre de 2019

### RESUMEN

**Palabras claves:**

Control PID, Control Proporcional Integral Generalizado, modelamiento, rechazo de perturbaciones.

Este documento describe el desarrollo de una estrategia de control basada en el rechazo activo de perturbaciones (CRAP), como lo es el Control Proporcional Integral Generalizado (GPI) el cual se le aplica a un sistema Ball and Beam. En esta investigación se pretende mostrar las ventajas de la estrategia de control GPI en cuanto a seguimiento y rechazo de perturbaciones, frente a las técnicas de control clásicas como lo es el controlador proporcional, integral y derivativo (PID). La validación de este diseño parte del modelamiento del sistema realimentado y con dicho modelo se realizaron simulaciones en condiciones nominales, aplicando las dos estrategias de control. Se encontró que el control GPI presentó un mejor desempeño ya que logra un porcentaje de Error cuadrático medio menor al del control PID, aun en presencia de perturbaciones, por lo que es posible afirmar que el error tiende asintóticamente a cero siempre que las ganancias del polinomio del error sean lo suficientemente grandes.

### ABSTRACT

**Keywords:**

PID control, Generalized Proportional Integral Control, modeling, disturbance rejection.

This document describes the development of a control strategy based on active disturbance rejection (ADRC), such as Generalized Proportional Integral Control (GPI) which is applied to a Ball and Beam system. In this research, we will show the advantages of the GPI control strategy in terms of tracking and rejection of disturbances, compared to classical control techniques such as the proportional, integral and derivative controller (PID). The validation of this design is based on the modelling of the feedback system and with this model simulations were carried out under nominal conditions, applying the two control strategies. It was found that the GPI control presented a better performance since it achieves a lower percentage of Mean Square Error than the PID control, even in the presence of perturbations, so it is possible to affirm that the error tends asymptotically to zero as long as the gains of the error polynomial are sufficiently large.

### 1. Introducción

En la actualidad, la mayoría de problemas de control que se presentan se pueden solucionar con facilidad, ya que, para cierta señal de entrada, su salida está delimitada y muchas veces esta es constante[1]; no obstante, por su naturaleza o por el diseño de estos existen sistemas que son inestables, la cual para que estos operen de forma segura se busca llevar a cabo una realimentación con el método de control propuesto. Siendo así se puede decir que el estudio de sistemas que por naturaleza o por diseño son inestables es de mucho interés[2], puesto que son problemas de control que se deben estudiar profundamente y se requiere de hacerlo en un laboratorio. El inconveniente que se presentan en este tipo de sistemas se da debido a la no linealidad intrínseca del mismo; para dar solución a esta

problemática presentada se propone utilizar un sistema de Ball and Beam, el cual es un sistema que consiste en una viga pivotado en un extremo por un motor eléctrico, que es responsable de variar el ángulo de inclinación del mismo para mantener en cierta posición una pelota que se mueve libremente sobre su superficie, esta plataforma popular nos ayuda a implementar y analizar los resultados de varios algoritmos de control modernos [3]. La estructura de control de este sistema también se utiliza para muchos esquemas diferentes en aplicaciones prácticas [4]. Se utiliza para demostrar la aplicación de control físico, como la regulación de balanceo de la aeronave. Es ampliamente utilizado debido a su simplicidad. La inestabilidad de bucle abierto es una de las propiedades importantes de este sistema de ball and beam porque hay un crecimiento

**Autor para correspondencia**

Correo electrónico: [fidiaz005@ikasle.ehu.es](mailto:fidiaz005@ikasle.ehu.es) (Faber Orlando Diaz-Garcés)

La revisión por pares es responsabilidad de la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña  
Artículo bajo la licencia CC BY-NC (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.es>)



ilimitado en la salida del sistema para una entrada fija. [5]. El sistema de ball and beam ha sido estudiado y utilizado en las pruebas de nuevos métodos por muchos investigadores. En particular Abdulbasid Ismail Isa, Mukhtar Fatihu Hamza, Aminu Yahaya Zimit, Jamilu Kamilu Adamu quienes han realizado pruebas del sistema utilizando lógica difusa[6]. TDai. Anjali, Shyju Susan Mathew hicieron un estudio similar utilizando control óptimo[7]. Dai Kinoshita y Kazunobu Yoshida, por otro lado diseñaron una estructura de control basado en el modelo interno[8]. Es así como el sistema de ball and beam presenta un interesante problema de control por lo mencionado anteriormente. El sistema a estudiar es un sistema inestable y en este tipo de sistemas es posible implementar de estrategias de control clásicas o como es el objetivo primordial de este documento se pueden llevar a cabo las estrategias de control modernas como la es el control proporcional integral generalizado (GIP) [9]. El objetivo de este documento es la implementación de esta estrategia de control con el fin de disminuir el error de seguimiento y rechazar las perturbaciones internas y externas del sistema.

**2. Modelo del sistema**

Se coloca una bola en una viga, (Figura 1 y 2), donde se permite rodar con 1 grado de libertad a lo largo de la longitud de la viga. Un brazo de palanca está unido a la viga en un extremo y un servo engranaje en el otro[9]. Cuando el mecanismo servoasistido gira en un ángulo theta, la palanca cambia el ángulo de la viga por alfa. Cuando se cambia el ángulo de la posición horizontal, la gravedad hace que la bola ruede a lo largo de la viga [10].

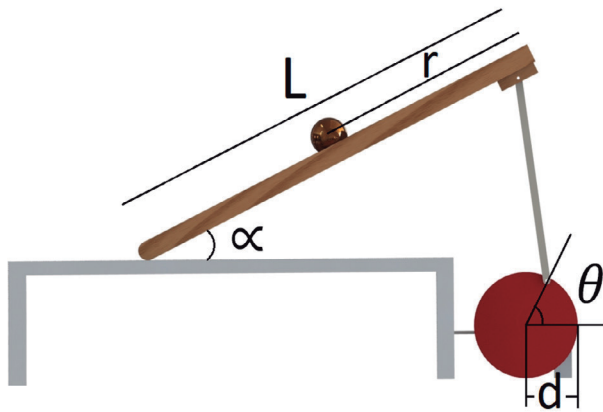


Figura 1. Diagrama del sistema

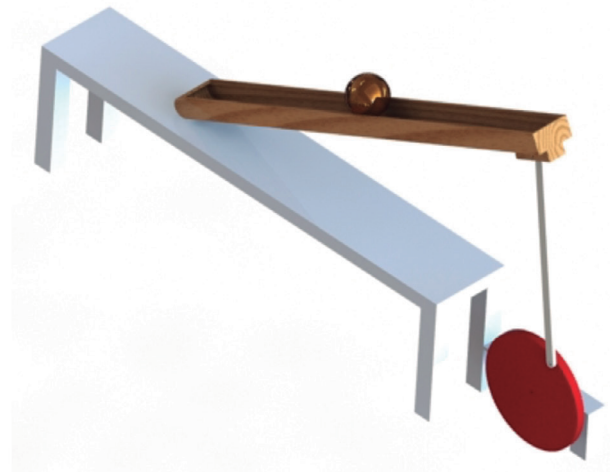


Figura 2. Diagrama del sistema

El modelo matemático de este sistema está dado por la ecuación lagrangiana

$$0 = \left(\frac{J}{R^2} + m\right) a + mg \sin(\alpha) - mx \alpha^2 \quad (1)$$

Donde alfa (α) es el ángulo entre la biga y el eje horizontal.

Para el instante en que la bola se encuentra estable en el sistema, se hará una consideración de que α=0, por lo que la ecuación queda reducida a:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right) a = -mg \alpha \quad (2)$$

Luego se realiza una aproximación lineal con la longitud de arco para los dos sistemas de referencia: y α θ

Donde s<sub>1</sub>=dθ y s<sub>2</sub>=L α entonces se dice que s<sub>1</sub>=s<sub>2</sub> resultando en la ecuación 3.

$$\alpha = \frac{d}{L} * \theta \quad (3)$$

Reemplazando la ecuación 3 en la ecuación 2 da como resultado

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right) \ddot{x} = -mg \frac{d}{L} \theta \quad (4)$$

En donde los datos conocidos se presentan en la tabla 1

Tabla 1. Datos conocidos.

m	0.02327 Kg	Masa de la bola
R	33.95 mm	Radio de la bola
d	50.9 mm	Long de la manivela
g	9.81 m/s <sup>2</sup>	Aceleración gravitacional
L	0.275 m	Long de la viga
J	10.7284 Kg*mm <sup>2</sup>	Momento de inercia de la bola

### 3. Controlador GPI

Este tipo de estrategias de control como lo son las técnicas GPI[11], son capaces de rechazar diferentes tipos de perturbaciones que se adhieren a la salida del sistema, siendo más robusto frente a las perturbaciones desconocidas [12-13]. Teniendo en cuenta lo anterior se puede decir que, para un sistema de una sola entrada y una sola salida, no lineal de orden  $n$ , perturbado y suave, de la forma:

$$y^{(n)}(t) = \psi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) + \varphi(t, y(t))u(t) + \delta(t) \quad (5)$$

Se dice que el sistema es no perturbado para  $\delta_{(t)}=0$  y que este es diferencialmente plano, puesto que es posible expresar todas las variables del sistema, incluyendo  $u_{(t)}$ , en términos de funciones diferenciales de la salida plana  $y_{(t)}$  i.e., funciones de  $y_{(t)}$  y un número finito de sus derivadas temporales [14-15]. Se supone que la perturbación exógena  $\delta_{(t)}$ , es uniformemente, acotada.

Teniendo en cuenta lo anterior se puede decir que el sistema descrito en la ecuación 4, es diferencialmente plano, ya que se puede expresar de la forma:

$$y^{(n)}(t) = \kappa u(t) + \delta(t) \quad (6)$$

Donde  $\delta_{(t)}$  recoge las perturbaciones externas e internas y también las incertidumbres del sistema propias de las dinámicas no modeladas del mismo, es  $m$ -diferenciable y uniformemente acotada i.e.

$$\sup |\xi^{(m)}(t)| \leq \kappa. \text{ Donde } \kappa = \frac{-mgd}{\left(\frac{J}{R^2}+m\right)L}.$$

$$\ddot{x} = \frac{-mgd}{\left(\frac{J}{R^2}+m\right)L} u(t) + \delta(t) \quad (7)$$

El control GPI se diseña en el marco del “rechazo activo de perturbaciones” [16], e incluye un modelo polinomial en el tiempo de las perturbaciones dependientes del estado y de aquellas que son de carácter exógeno sin estructura especial alguna [17]. En la ecuación 8 se muestra la estructura del control  $\kappa = \frac{-mgd}{\left(\frac{J}{R^2}+m\right)L}$  GPI, en donde y la salida  $x$  del sistema es la posición

de la bola;  $m$  es el orden del polinomio con el que se aproxima la perturbación;  $n$  es el orden del sistema;  $K_{n+m}, \dots, K_1, K_0$  corresponden las ganancias de dicho polinomio; y  $r$ .

$$u(t) = \frac{1}{\kappa} \left[ r^{(n)} - \left( \frac{K_{n+m}s^{n+m} + \dots + K_1s + K_0}{s^{m+1}(s^{n-1} + K_{2n+m-1}s^{n-2} + \dots + K_{n+m+1})} \right) (x - r) \right] \quad (8)$$

Para el caso de estudio, se parte del supuesto que  $\frac{d^{m+1}\delta(t)}{dt^{m+1}} = 0$ , para  $m=4$  la estructura del control GPI se puede escribir como:

$$u(t) = \frac{1}{\kappa} \left[ r^{(2)} - \left( \frac{K_6s^6 + K_5s^5 + K_4s^4 + K_3s^3 + K_2s^2 + K_1s + K_0}{s^5(s+K_7)} \right) (x - r) \right] \quad (9)$$

Reemplazando la ecuación (9) en la ecuación (7) se tiene que:

$$x^{(2)} = r^{(2)} - \left( \frac{K_6s^6 + K_5s^5 + K_4s^4 + K_3s^3 + K_2s^2 + K_1s + K_0}{s^5(s+K_7)} \right) (x - r) + \delta(t) \quad (10)$$

Luego

$$\delta(t) = (x^{(2)} - r^{(2)}) - \left( \frac{K_6s^6 + K_5s^5 + K_4s^4 + K_3s^3 + K_2s^2 + K_1s + K_0}{s^5(s+K_7)} \right) (x - r) \quad (11)$$

Donde  $(x-r)$  representa el error de seguimiento e  $(x^{(2)}-r^{(2)})$  es la segunda derivada del mismo.

$$\delta(t) = \ddot{e} - \left( \frac{K_6s^6 + K_5s^5 + K_4s^4 + K_3s^3 + K_2s^2 + K_1s + K_0}{s^5(s+K_7)} \right) e \quad (12)$$

Resolviendo la ecuación 12 y aplicando la transformada de Laplace, se obtiene:

$$(s^5 \delta(t))(s + K_7) = (s^8 + K_7s^7 + K_6s^6 + K_5s^5 + K_4s^4 + K_3s^3 + K_2s^2 + K_1s + K_0)e \quad (13)$$

Donde  $(s^5 \delta_{(t)})=0$ , entonces:

$$e(s^8 + K_7s^7 + K_6s^6 + K_5s^5 + K_4s^4 + K_3s^3 + K_2s^2 + K_1s + K_0) = 0 \quad (14)$$

En la ecuación 14 se presenta la dinámica del error  $e$ , de esta se puede decir que, si  $\delta_{(t)}$  se encuentra dentro de sus límites, es decir es una señal acotada, y se eligen los coeficientes  $K_i$ , de manera tal que  $i=1,2,\dots,7$ , lleven a las raíces del polinomio característico de la dinámica del error que se muestra en la ecuación 14 al lado izquierdo del plano complejo, haciendo que el error de seguimiento sea delimitado y los límites puede hacerse tan pequeña siempre que se quiera alejar las raíces de este del eje imaginario.

### 4.Resultados

El objetivo del control es rastrear una posición deseada de la bola a pesar de las no linealidades o perturbaciones del sistema, para esto se utiliza el modelo simplificado de este, ya que la estrategia de control GPI toma la incertidumbre y las dinámicas no modeladas del sistema como una perturbación, viendo a este como una cadena de integradores.

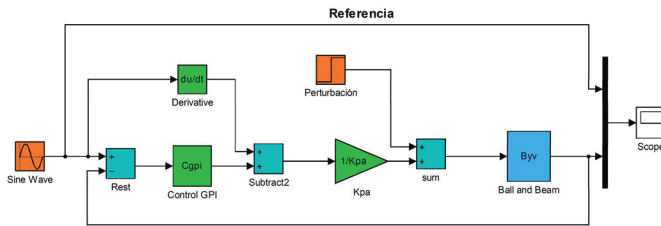


Figura 3. Diagrama de bloques de la estructura del control GPI (Simulink)

Para probar la estrategia de control aplicada al sistema Ball and Beam, se realizó el modelo en la herramienta Simulink de Matlab como se muestra en la figura 3, inicialmente se evaluó la estrategia de control GPI para diferentes valores de  $m$  como se muestra en la figura 4, en esta se puede apreciar que, para valores altos de  $m$  como  $m = 10$  el sobrepico de la respuesta transitoria es menor que para valores de  $m = 2$  o  $m = 4$ , con las raíces del polinomio de aproximación de la perturbación en un rango de  $(-1000)$  a  $(-5000)$  se propuso una señal de referencia sinusoidal con un periodo de 20s y una señal tipo paso. Se midió el error de seguimiento con el porcentaje de error cuadrático medio (PECM) y los resultados se compararon con un controlador PID el cual se sintonizó a través de la app PID Tuner de Matlab. En la figura 5 se muestra la señal de salida del sistema (la posición) tratando de seguir a la señal de referencia (la posición deseada) en una trayectoria sinusoidal, al aplicar las estrategias de control GPI y PID, luego se presenta la figura 6 en donde se aprecia la respuesta del sistema ante una señal de tipo escalón unitario.

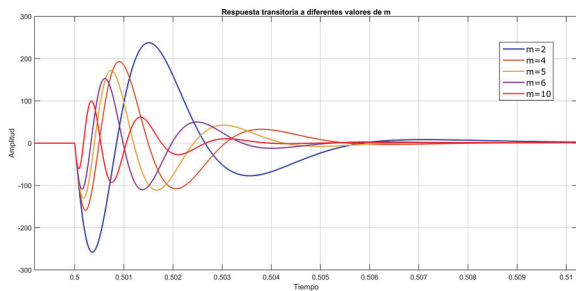


Figura 4. Diagrama de la respuesta transitoria del sistema a diferentes valores de  $m$ .

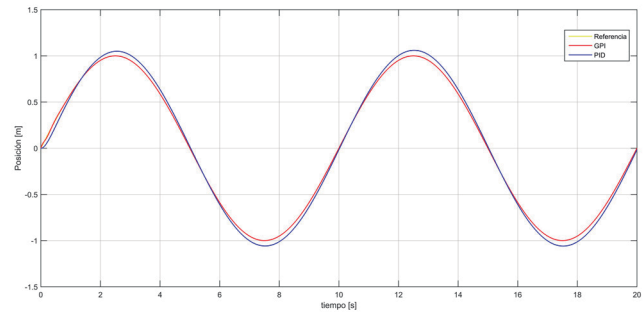


Figura 5. Seguimiento de referencia del controlador PID y del controlador GPI.

Se seleccionaron ocho polos para el controlador GPI con valores de  $[-2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0 -5.5] \times 10^2$ , dando como resultado la figura 5 y la figura 6, estos resultados se muestran en la tabla 2.

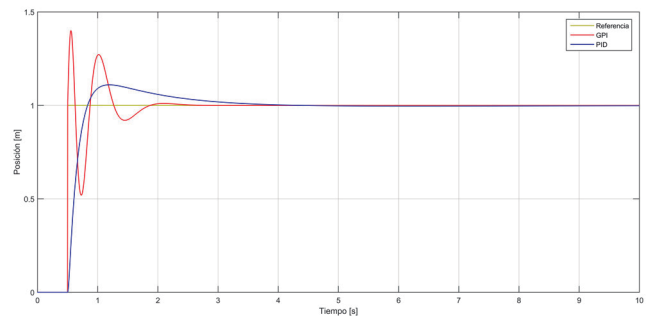


Figura 6. Seguimiento de referencia del controlador PID y del controlador GPI.

Tabla 2. Datos comparativos

Est. de ctrl.	PECM(Sin)	PECM(Step)
GPI	6.1756 $\times 10^{-13}\%$	0.2222%
PID	0.0515%	0.2802%

Para el rechazo de perturbaciones, se le sumó una señal tipo paso y una señal sinusoidal de 2Hz a la entrada de la planta a los 10s, y se calculó el porcentaje de error cuadrático medio. La comparación de los resultados se muestra en las figuras 7, 8, 9 y 10; y en la tabla 3 y 4.

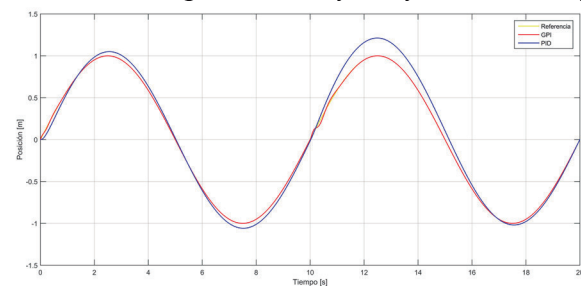
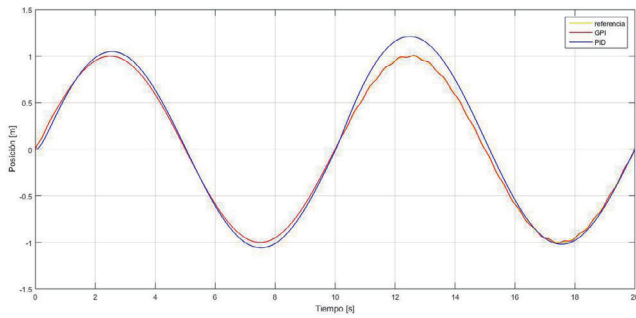
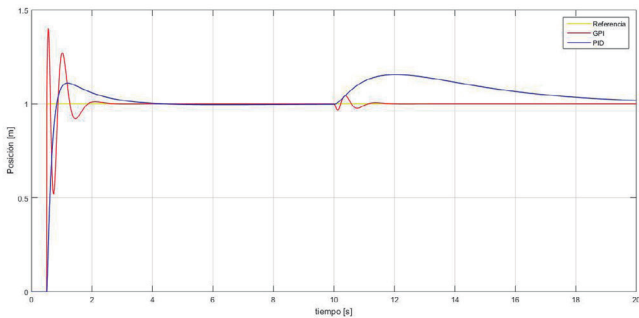


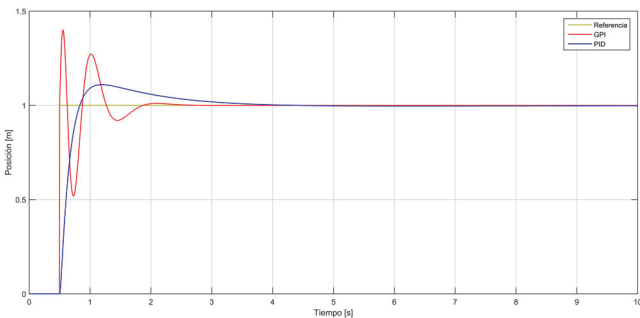
Figura 7. Rechazo de perturbaciones del controlador PID y del controlador GPI.



**Figura 8.** Rechazo de perturbaciones del controlador PID y del controlador GPI.



**Figura 9.** Rechazo de perturbaciones del controlador PID y del controlador GPI.



**Figura 10.** Rechazo de perturbaciones del controlador PID y del controlador GPI.

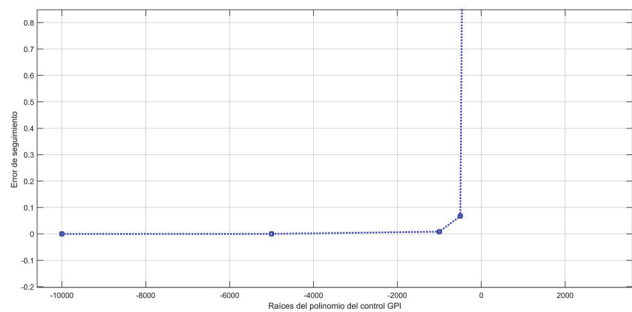
**Tabla 3.** Perturbación tipo Paso.

Est. de ctrl	PECM(Sin)	PECM(Step)
GPI	$6.1756 \times 10^{-13}\%$	0.2222%
PID	4.3065%	2.8472%

**Tabla 4.** Perturbación tipo sinusoidal.

Est. de ctrl	PECM(Sin)	PECM(Step)
GPI	$6.1756 \times 10^{-13}\%$	0.2222%
PID	0.0562%	0.2821%

De igual forma en la figura 11 se muestra en el eje Y el error cuadrático medio del error de seguimiento y en el eje X las raíces del polinomio del control GPI, en donde se evidencia que a medida que las raíces del polinomio se alejan de cero hacia la izquierda el error de seguimiento tiende a cero.



**Figura 11.** Rechazo de perturbaciones del controlador PID y del controlador GPI

### 5. Conclusiones

Las técnicas de control GPI presentan una muy buena respuesta frente a diferentes perturbaciones externas. Es posible afirmar que el error tiende asintóticamente a cero siempre que las ganancias del polinomio del error sean lo suficientemente grandes. Frente al control PID, el control propuesto presenta mejor desempeño en cuanto a seguimiento y a rechazo de perturbaciones. Se puede decir que en la medida que se aumente el orden del polinomio (m) la respuesta transitoria del sistema será menor.

### 6. Referencias

- [1] V. Bordignon and L. Campestri, "Data-Driven PID Control Tuning for Disturbance Rejection in a Hierarchical Control Architecture," IFAC-PapersOnLine, vol. 51, no. 4, pp. 569–574, 2018. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.06.156>
- [2] C. Fu and W. Tan, "Control of unstable processes with time delays via ADRC," ISA Trans., vol. 71, pp. 530–541, 2017. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2017.09.002>
- [3] A. Taifour Ali, A. A. M., A. H. A., O. A. Taha, and A. Naserldeen A., "Design and Implemen-

- tation of Ball and Beam System Using PID Controller,” *Autom. Control Inf. Sci.*, vol. 3, no. 1, pp. 1–4, 2017. Doi: 10.12691/acis-3-1-1
- [4] B. Meenakshipriya and K. Kalpana, "Modelling and control of ball and beam system using Coefficient Diagram Method (CDM) based PID controller," in third international conference on advances in control and optimization of Dynamical Systems, Kanpur-India, 2014, pp. 620-626.
- [5] I. M. Mehedi, U. M. Al-Saggaf, R. Mansouri, and M. Bettayeb, "Two degrees of freedom fractional controller design: Application to the ball and beam system," *Meas. J. Int. Meas. Confed.*, vol. 135, pp. 13–22, 2019
- [6] A. I. Isa, M. F. Hamza, A. Y. Zimit, and J. K. Adamu, "Modelling and fuzzy control of ball and beam system," *IEEE Int. Conf. Adapt. Sci. Technol. ICAST*, vol. 2018-August, pp. 1–6, 2018
- [7] T. Anjali and S. S. Mathew, "Implementation of optimal control for ball and beam system," in International Conference on Emerging Technological Trends, 2016, pp. 3–7.
- [8] D. Kinoshita and K. Yoshida, "Stabilizing Control for a ball and beam system considering the restricted beam angle and ball speed," 2019 58th Annu. Conf. Soc. Instrum. Control Eng. Japan, SICE 2019, pp. 170–176, 2019.
- [9] F. J. Regino Ubarnes, E. M. Ochoa, and A. L. Vergel, "Control proporcional integral generalizado (gpi) para el lazo de corriente de un convertidor ac – dc boost bridgeless," *Rev. Ingenio UFPSO*, vol. 13, no. e-ISSN 2389-864X, pp. 49–56, 2017. Doi: <https://doi.org/10.22463/2011642X.2132>
- [10] L. Y. Gao Liqing, "Design of BP Neural Network Controller for Ball- beam System," in Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference, Xian-China, 2016, pp. 1–5.
- [11] J. Cortés-Romero, A. Jimenez-Triana, H. Coral-Enriquez, and H. Sira-Ramírez, "Algebraic estimation and active disturbance rejection in the control of flat systems," *Control Eng. Pract.*, vol. 61, no. 45, pp. 173–182, 2017. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2017.02.009>
- [12] E. W. Zurita-Bustamante, J. Linares-Flores, E. Guzmán-Ramírez, and H. Sira-Ramírez, "A comparison between the GPI and PID controllers for the stabilization of a dc-dc 'buck' converter: A field programmable gate array implementation," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 11, pp. 5251–5262, 2011. Doi: 10.1109/TIE.2011.2123857
- [13] H. Rojas-Cubides, J. Cortés-Romero, H. Coral-Enriquez, and H. Rojas-Cubides, "Sliding mode control assisted by GPI observers for tracking tasks of a nonlinear multivariable Twin-Rotor aerodynamical system," *Control Eng. Pract.*, vol. 88, no. 172, pp. 1–15, 2019. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2019.04.002>
- [14] H. Sira-Ramírez, A. Luviano-Juárez, and J. Cortés-Romero, "Control Lineal Robusto de Sistemas No Lineales," *Rev. Iberoam. automática e informática Ind.*, vol. 8, no. 1, pp. 14–28, January-2011. Doi: [https://doi.org/10.1016/S1697-7912\(11\)70004-8](https://doi.org/10.1016/S1697-7912(11)70004-8)
- [15] Z. Gao, "Active disturbance rejection control: A paradigm shift in feedback control system design," in American Control Conference, 2006, pp. 2399–2405.
- [16] H. Coral-enriquez, G. a Ramos, and J. Cort, "Power factor correction and harmonic compensation in an active filter application through a discrete-time active disturbance rejection control approach," in America Control Conference, Chicago-USA, 2015, pp. 5318–5323
- [17] F. J. Regino Ubarnes, "Desarrollo de un sistema de control para el lazo de corriente de un convertidor ac-dc tipo boost bridgeless Fernando Jesús Regino Ubarnes," Tesis de Maestría, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá-Colombia, 2016.