

REVISTA

PERSPECTIVAS

UFPS

Original Article

<https://doi.org/10.22463/25909215.4117>

El conocimiento acerca de las ideas matemáticas sobre el infinito, El caso de los educadores matemáticos en formación de la Universidad de Nariño.

Knowledge About Mathematical Ideas About Infinity. The Case Of The Mathematics Educators In Training At The University Of Nariño

Saulo Mosquera-López¹, Oscar Fernando Soto-Agreda², Gustavo Adolfo Marmolejo-Avenia³

¹Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Grupo de investigación GESCAS, samolo@udenar.edu.co, ORCID: 0000-0002-5932-544, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

²Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Grupo de investigación GESCAS, fsoto@udenar.edu.co, ORCID: 0009-0000-1234-5450, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

³Universidad de Nariño, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Grupo de investigación GESCAS, g.marmolejo.math@udenar.edu.co, ORCID: 0000-0001-9047-4389, Pasto, Colombia.

Comoc citar: Mosquera-López S., Soto-Agreda O.F, Marmolejo-Avenia G.A., “El Conocimiento A Cerca De Las Ideas Matemáticas Sobre El Infinito. El Caso De Los Educadores Matemáticos En Formación De La Universidad De Nariño.”. *Perspectivas*, vol. 8, no. S1, pp. 97-103, 2023.

Received: Junio 18, 2023; Approved: Septiembre 15, 2023.

RESUMEN

Palabras clave:

Conocimiento Especializado, Infinito, Ideas Matemáticas, Épocas De Desarrollo Del Infinito.

En este artículo se discriminan las ideas matemáticas que un grupo de educadores matemáticos promueven a través de la enseñanza del infinito. Para lograr lo anterior, se adaptó el modelo del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En el desarrollo de esta investigación se asumió un enfoque cualitativo descriptivo, como población se consideraron 50 secuencias de enseñanza diseñadas por el mismo número de educadores matemáticos en formación (EMF) encaminadas a suscitar el estudio del infinito en un curso de ingeniería. Dos categorías de análisis fueron consideradas para organizar los datos de la investigación: ideas matemáticas sobre el infinito y épocas de desarrollo del infinito. Como resultado, se infiere que los Educadores Matemáticos en Formación tienen un dominio limitado sobre este concepto puesto que las ideas matemáticas utilizadas para el desarrollo de las secuencias de enseñanza estuvieron fundamentalmente referidas a ideas intuitivas del mismo, las cuales se ubican en la época antigua; consecuentemente, ideas tales como la definición de conjunto infinito o la puesta en correspondencia entre los infinitos actual y potencial, de la época moderna y contemporánea no fueron consideradas cabalmente.

ABSTRACT

Key words:

Specialized Knowledge, infinity, mathematical ideas, epochs of development of infinity.

This article discriminates the mathematical ideas that a group of mathematical educators promote through the teaching of infinity. To achieve the above, the model of the specialized knowledge of the mathematics teacher was adapted. A qualitative descriptive approach was assumed; as a population, 50 teaching sequences designed by the same number of mathematics educators were considered, aimed at encouraging the study of infinity in an engineering course. Two categories of analysis were considered to organize the research data: mathematical ideas about infinity and epochs of development of infinity. As a result, it is inferred that Mathematics Educators in Training have a limited domain over this concept since the mathematical ideas used for the development of the teaching sequences were fundamentally referred to intuitive ideas of the same that are located in ancient times and consequently, ideas such as the definition of an infinite set or the correspondence between the actual and potential infinities, of modern and contemporary times were not fully considered.

*Corresponding author.

E-mail address: samolo@udenar.edu.co

(Saulo Mosquera-López)



Peer review is the responsibility of the Universidad Francisco de Paula Santander. This is an article under the license CC BY 4.0

Introducción

El infinito

En palabras de Hilbert, el infinito, es una idea que siempre ha atormentado la sensibilidad de los hombres. El concepto de infinito es el que más ha requerido de dilucidación. Lo anterior, ilustra la complejidad conceptual que el infinito posee, así como las dificultades que su comprensión y asimilación han generado a lo largo de los muchos siglos que ha requerido su consolidación.

Un segundo aspecto que ilustra que “el infinito” es un objeto de difícil conceptualización y aprehensión, por un lado, que, todas y cada una de las personas utilizamos el infinito en nuestro diario vivir, asimismo, que tenemos una concepción de este objeto, generalmente, basada en el sentido común o en concepciones ingenuas que se acercan a lo meramente intuitivo. Son ejemplos de lo anterior, el uso de frases como “Lo quiero mucho demás y hasta el infinito” o “infinitas como los granos de arena de la playa”.

El hecho que, en ninguno de los diferentes niveles de estudio del sistema educativo colombiano se considera el infinito como objeto de estudio, constituye una tercera cuestión que realza las dificultades de aprehensión del infinito. Más aún, este objeto es transversal a muchas temáticas de matemáticas consideradas en el sistema educativo. Por citar algunas: número natural, número irracional, decimal periódico, número real, fracción continua, recta, rectas paralelas, sucesión, serie, asíntota, límite, derivada, recta tangente a una curva, sistemas de ecuaciones y su interpretación geométrica, fractal, integral, método de inducción, cardinal de un conjunto y número transfinito.

Un último aspecto se asocia con las dificultades matemáticas que evidencian los educadores al ser cuestionados sobre el “infinito matemático”, en este sentido las respuestas no suelen ser tan precisas como se esperaría que fuesen. Por ejemplo, cuando en un

curso de cálculo, hablamos sobre límites infinitos o sobre límites en el infinito, ¿reflexionamos sobre el significado del objeto infinito o lo usamos de manera instrumental?

Todo lo anterior, hace un urgente llamado a que, la función de la escuela debe ser transformar toda idea simplista e ingenua en una concepción delicada, compleja y académica que corresponda a la actual concepción matemática del infinito.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Propone considerar tanto su conocimiento matemático como su conocimiento didáctico del contenido, de forma complementaria se consideran las creencias de los profesores como un elemento que influye sobre el conocimiento que los profesores desarrollan acerca del contenido. En cuanto al conocimiento matemático, elemento de interés en la investigación, se asume como el tipo de conocimiento disciplinar que permite, al profesor, gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Carrillo et al., 2013).

El conocimiento matemático estudia el conocimiento de los temas enseñados, de su estructura matemática y de la práctica matemática. El primero de los conocimientos reseñados alude a conocer los conceptos dentro del mismo, con una profundidad mayor que otros usuarios de las matemáticas (no docentes). Este es un conocimiento de carácter especializado, el cual incluye el conocimiento que dicho usuario potencialmente pudiera adquirir. (Carrillo et al., 2013).

El conocimiento de la estructura de las matemáticas, por su parte, engloba un entendimiento del tópico matemático desde la perspectiva de un contexto matemático más amplio (Kilpatrick, 2008), permitiendo al profesor relacionar temas diferentes, o establecer conexiones entre conceptos más allá de los pretendidos en una sesión concreta.

Finalmente, el conocimiento de la práctica matemática, en la que están incluidos los saberes del profesor relativos a los procedimientos de establecimiento de la validez en matemáticas, tipos de demostraciones, diferentes tipos de razonamientos heurísticos, así como la familiaridad con los procesos de modelización matemática y generalización.

La aplicación de la metodología del conocimiento matemático especializado depende del conocimiento puntual analizado, por tanto, para cada caso los investigadores deben asumir o modificar los subdominios considerados, así como sus conceptualizaciones. Así mismo los investigadores deben definir al interior de cada subdominio los descriptores (formas en que aparecen los subdominios) necesarios, estos últimos son quienes, en últimas, van a permitir analizar de manera puntual el conocimiento matemático que se está considerando.

Antecedentes sobre el estudio del conocimiento matemático de los profesores sobre el infinito

La literatura especializada reporta pocas investigaciones acerca del conocimiento especializado del profesor sobre el infinito. En dichos casos, se estudia el conocimiento del profesor en contextos educativos diferentes al explorado en este artículo.

Por ejemplo, se analiza cómo el infinito es tratado por los profesores de Primaria, Secundaria y Bachillerato al estudiar los números enteros, las sumas de series y los números periódicos puros (Montes, Contreras y Carrillo, 2018). También, se caracterizan los hilos de contenido matemático que sobre el infinito se encuentran explícitos en los currículos de primaria (Holton y Symons, 2020).

Asimismo, se determina el conocimiento sobre el infinito que profesores de secundaria evidencian al suscitar discusiones sobre contextos matemáticos

donde el infinito interviene (Montes y Carrillo, 2017).

En cuanto al conocimiento matemático de EMF, cuestión de interés en el presente trabajo, existen estudios que centran su atención en las falsas concepciones sobre el infinito (González et al., 2013), o sobre los métodos de argumentación utilizados (Date-Huxtable et al., 2018).

No obstante, ninguna de estas investigaciones focaliza su atención en el conocimiento matemático inmerso en las secuencias de enseñanza diseñadas por los EMF. Esta es una cuestión determinante para los programas de formación de educadores matemáticos, pues, la explicitación de las formas cómo se incluye un objeto de enseñanza a través del diseño de secuencias de enseñanza permite comprender cómo los EMF están aprehendiendo (y asignando funcionalidad) a los referentes teórico-conceptuales y metodológicos estudiados.

Lo anterior, sin lugar a duda, es una cuestión básica, fundamental y determinante para la Didáctica de las Matemáticas.

Propósito de la investigación

El propósito de este artículo es discriminar el conocimiento matemático especializado, en torno a las ideas matemáticas que un grupo de EMF evidencian, a través del diseño de secuencias de enseñanza, encaminadas a promover el estudio del infinito en un curso de ingeniería.

Materiales y Métodos

Naturaleza de investigación

Se privilegió un acercamiento cualitativo-descriptivo (Bisquerra, 1989) centrado en el estudio de caso (Stake, 2000). Conforme al propósito de discriminar las ideas matemáticas que constituyen las secuencias de enseñanza diseñadas por un grupo de EMF, el estudio focalizó su atención en el paradigma

de la investigación de diseño desde el enfoque de análisis de contenido (Flórez y Tobón, 2001). La captación y selección de los datos, por su parte, se hizo de forma mixta, es decir, algunos elementos que describen ciertas categorías de análisis asumidas en el estudio fueron contemplados de investigaciones previas, otros lo fueron, directamente, del accionar de la población analizada (Marmolejo, 2021; Marmolejo y Mosquera, 2021). Así mismo, considerando el grado de abstracción, se trata de una investigación básica que no pretende establecer aplicaciones prácticas que puedan deducirse del estudio (Bisquerra, 1989).

Población, fuentes de datos y trabajo de campo

Un total de 50 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño (Colombia) participaron en la investigación, 20 estudiantes de semestre quinto, 20 de séptimo semestre y 10 de semestre noveno. Los estudiantes fueron seleccionados aleatoriamente y, previo al desarrollo de la investigación, habían participado en procesos de diseño de secuencias de enseñanza. En ningún caso considerando el conocimiento matemático especializado de los profesores ni al infinito como objetos de reflexión.

Todos los estudiantes realizaron las tareas propuestas en la investigación, por tanto, los datos empíricos recolectados incluyen la totalidad de los procedimientos de la población seleccionada. En cuanto al diseño de las secuencias de enseñanza (fuentes de datos), los estudiantes fueron separados del aula (y del resto de estudiantes) donde (y con quienes) habitualmente estudiaban.

El proceso de diseño de la secuencia de enseñanza consideró tres fases: 1) discriminación de errores, dificultades y obstáculos en la enseñanza y el aprendizaje del infinito (tres sesiones de trabajo de dos horas cada una), 2) identificación de las ideas que organizarán el diseño de las secuencias de enseñanza, y establecimiento de sus propósitos

educativos así como los posibles contextos de aplicación (tres sesiones de trabajo de dos horas cada una), y 3) elaboración de las actividades y consignas que se considerarán para promover el estudio del infinito, así como el desarrollo esperado de las tareas propuestas en las consignas (procedimiento esperado), cinco sesiones de trabajo de tres horas cada una fue el espacio asumido para esta última fase.

Unidades de análisis e instrumento de recolección de datos

Los enunciados y las representaciones que constituyen las consignas de las actividades diseñadas por los EMF junto a los procesos de resolución por ellos elaborados constituyeron las unidades de análisis de la investigación. En cuanto, a los instrumentos de recolección de datos, se diseñó una serie de tablas de doble columna para sistematizar la información expuesta en las consignas de las actividades de las secuencias de enseñanza diseñadas y en los procedimientos esperados, en casos puntuales, se aplicaron entrevistas semi-estructuradas para ampliar o precisar las descripciones realizadas en las consignas.

Instrumento de análisis

Fueron dos los interrogantes que orientaron nuestro estudio, a saber, ¿cuál es el conocimiento que los EMF de la universidad de Nariño privilegian al diseñar secuencias de enseñanza encaminadas a suscitar el estudio del infinito en un curso de ingeniería? ¿Según la inclusión de tales ideas cuáles periodos del desarrollo del concepto del infinito fueron los privilegiados?

Para dar respuesta a esta cuestión se tuvieron en cuenta tres categorías de análisis: ideas matemáticas asociadas al estudio del infinito, periodos de desarrollo del infinito y momentos de la secuencia de enseñanza, la primera conformada por ocho descriptores, la segunda por cuatro y la tercera por

tres. En lo que sigue se definen los descriptores de cada una de las categorías de análisis reseñadas.

• **Descriptores de la categoría Ideas matemáticas asociadas al estudio del infinito:**

Concepción elemental del objeto (delimitación intuitiva del infinito), Construcción de un conjunto infinito (elaboración formal de conjuntos con cardinalidad no finita), Concepto de conjunto Infinito (un conjunto es infinito si existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto y los números naturales), Cardinalidad de los números Naturales y su aritmética (definir el número cardinal de los Naturales que corresponde a \aleph_0 y sus propiedades), idea del continuo desde el infinito (de forma intuitiva hacer “ver” que hay cardinales mayores que \aleph_0 y que uno de esos cardinales es el de los números Reales que corresponde al continuo), hipótesis del continuo (no existe un conjunto infinito cuya cardinalidad esté, estrictamente, entre \aleph_0 y el continuo C , puesta en correspondencia entre los infinitos actual y potencial (poner en acción elementos que permitan contrastar los dos tipos de infinito) y Ninguno (carencia de elementos para tratar el concepto).

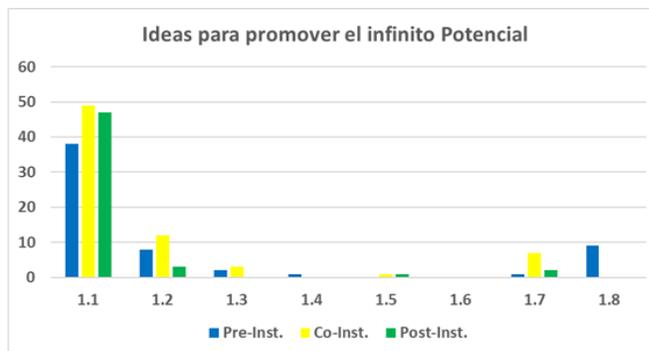
• **Descriptores de la categoría periodos de desarrollo del infinito:** son cuatro, el primero, denominado época antigua, alude al periodo de tiempo transcurrido entre la invención de la escritura aproximadamente entre el año 3500 a. C. y la caída del Imperio romano en el año 476 a. C. El segundo, Edad Media, es el período de tiempo comprendido entre el siglo V d. C. y el siglo XV d. C. La Edad Moderna, por su parte, es el período de tiempo transcurrido entre el siglo XV d. C. hasta finales del siglo XVIII. Finalmente, la Época contemporánea contempla el período de tiempo comprendido desde finales del siglo XVIII hasta nuestros días.

• Descriptores de la categoría momentos de la secuencia de enseñanza. Uno en el cual selecciona el objeto matemático sobre el cual va a focalizar sus actividades, (momento pre-instruccional). Otro en el cual considera actividades para tratar,

sobre este objeto, el infinito potencial (momento co-instruccional) y finalmente las actividades evaluativas enmarcadas en los momentos anteriores, (momento post-instruccional).

Resultados y Discusión

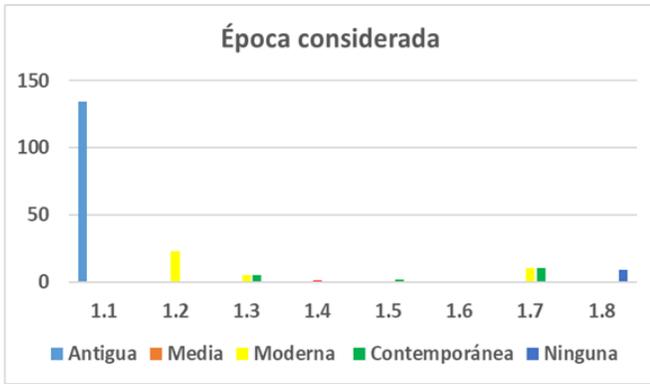
La gráfica 1 expone cómo las ideas matemáticas promocionadas por los EMF al suscitar el estudio del infinito son incluidas según su momento de aplicación.



Gráfica 1. Ideas matemáticas sobre el infinito según el momento de consideración en las secuencias de enseñanza.

Estos resultados indican una fuerte tendencia a utilizar ideas y estrategias que privilegian una concepción intuitiva del infinito, así mismo, se consideran de manera parcial aspectos relacionados con la construcción de conjuntos infinitos y el establecimiento de correspondencias entre los infinitos actual y potencial pero existe prácticamente una nula utilización de recursos e ideas que fomenten la consideración de los descriptores relacionados con la cardinalidad de N , así como la idea del continuo sobre el infinito y la hipótesis del continuo, sin embargo consideramos que esto puede deberse a la falta de consideración explícita de este concepto en el currículo.

En la gráfica 2 se presentan las ideas matemáticas consideradas por los EMF al suscitar el estudio del infinito según el periodo de desarrollo del infinito movilizado



Gráfica 2. Ideas matemáticas sobre el infinito según el periodo de desarrollo histórico del infinito.

Los resultados mostrados en la Gráfica 2 evidencian que en las propuestas de enseñanza se privilegiaron fundamentalmente estrategias y recursos didácticos relacionados con el desarrollo del concepto de infinito considerados en la época Antigua. Así mismo que, procedimientos de las épocas moderna y contemporánea fueron contemplados de manera muy parcial y no fue utilizada ninguna técnica relacionada con la Edad media. Este último hecho lo consideramos natural puesto que en este período no existieron avances significativos con relación al desarrollo del concepto de infinito, con excepción del trabajo realizado por el teólogo Nicolas de Cusa quien desprende al infinito de la carga teológica de la época, no considera la idea del infinito como algo impensable y lo convierte en un concepto académico que puede ser utilizado en matemáticas, aunque no puede ser analizado en los términos de mayor o menor.

Con base en estos gráficos y en el contenido de las propuestas es posible colegir que:

1. En la formación de los EMF existe un conocimiento incipiente de los elementos que a lo largo de la historia han permitido la consolidación del infinito.

2. En el Programa el estudio del infinito muestra limitaciones conceptuales pues se percibe en los EMF una formación en la que este concepto

se trata con sentido utilitarista y se detienen en una concepción simplista del mismo.

3. El diseño de las propuestas no muestra el vínculo que el infinito mantiene al interior de su naturaleza con la historia y la epistemología.

4. Para un EMF, (para un docente en general), no es claro, la implicación que en la enseñanza puede tener el concepto de infinito ya que para ellos el infinito es un conocimiento que únicamente utiliza como mediador de otros conceptos, con lo que no le es posible comprender la importancia que para su formación podría tener la comprensión cabal de este concepto.

5. En este trabajo el concepto que nos permite analizar las características del conocimiento de los EMF es el de infinito, concepto que de forma explícita está ausente en su formación y que por tanto no ha logrado interiorizar, ni asimilar cabalmente.

Conclusiones

En este trabajo hemos indagado acerca del conocimiento matemático sobre el concepto de infinito que poseen los EMF del Programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño.

Los resultados muestran que los EMF tienen un conocimiento elemental del infinito, el cual no corresponde con el desarrollo conceptual que se ha desarrollado a lo largo de la historia. Así mismo, el privilegio de estrategias y de recursos asociados a la época antigua indica que los EMF evidencian comprensión de tipo potencial del infinito. Lo anterior invita a considerar en los planes de estudio de formación de educadores matemáticos, la inclusión de elementos que promuevan reflexiones asociadas a la conceptualización institucional del infinito, que aporten elementos de consideración diferentes, tal vez complementarios, a lo meramente intuitivo.

Finalmente, al ser el infinito un concepto delicado y fino, de sutil percepción mental y alta complejidad matemática, rico en historia y devenir académico, es posible intuir que en el ámbito pedagógico se pueden establecer propuestas didácticas atractivas que confluyen en mantener interés permanente y dinamizar el concepto. Sin embargo, las propuestas analizadas no muestran evidencias de que los proponentes posean conocimientos suficientes alrededor del infinito. Esto puede deberse al hecho de que en los cursos regulares de matemáticas no se estudia el concepto propiamente dicho, sino que tan solo se hace fundamentalmente uso de este objeto con sentido de mediador.

Referencias

- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa*, Barcelona: CEAC.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics Teacher Specialized Knowledge. In: Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics, 8 th, Antalya. CERME 8, Antalya, Turquía: CERME 8. 2013. p. 2985-2994.
- Date-Huxtable, E., Cavanagh, M., Coady, C. & Michael Eas (2018). Conceptualisations of infinity by primary pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 30(4), 545 - 567
- Flórez, R. y Tobón, A. (2001). *Investigación educativa y pedagógica*. Bogotá, Colombia: McGraw Hill
- González, J., Morales, A. & Sigarreta, J-M. (2013). Concepciones sobre el infinito: Un estudio a nivel universitario. *Matemáticas, educación e internet*, 13(2), 1-12
- Holton, D., Symons, D. (2020) 'Infinity-based thinking' in the primary classroom: a case for inclusion in the curriculum. *Mathematics Education Research Journal*, 33(3), 1-16
- Marmolejo, G. y Mosquera, S. (2021). Razonamiento cuantitativo y demanda semiótico-cognitiva en las guías de orientación de las pruebas saber. San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño.
- Marmolejo, G-A. (2021). Función de control visual en el tratamiento del área de superficies planas. Un estudio comparativo de libros de texto colombianos y españoles. Pasto: Editorial Universidad de Nariño
- Montes, M., & Carrillo, J. (2017). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. *Bolema*, 31(57), 114-134.
- Montes, M., Contreras, L-C. & Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13(1), 5 – 20
- Stake, R. E. (2000). Case Studies. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (435-453).