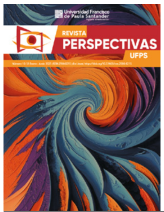

REVISTA PERSPECTIVAS UFPS

Original Article https://doi.org/10.22463/25909215.5623

Estudio de funciones en libros de precálculo. una mirada desde el modelo MTSK

Study of functions in pre-calculus books. a look from the MTSK model

Diana Elena Lasso Ordoñez[1], Raúl Prada Núñez[2*], Pastor Ramírez Leal[3]

[1]Maestrante en Educación Matemática, dialas-21@udenar.edu.co, ORCID XXXXXXXX, Universidad de Nariño, Nariño, Colombia.*
[2]Doctor en Ciencias de la Educación, raulprada@ufps.edu.co, ORCID 0000-0001-6145-1786, Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia.
[3]Mg. en Educación Matemática, pastorramirez@ufps.edu.co, ORCID 0000-0003-3469-5325, Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia.

Como citar: Lasso Ordoñez, D. E. ., Prada Núñez, R. ., y Ramírez Leal, P. . (2025). Estudio de funciones en libros de precálculo. una mirada desde el modelo MTSK. *Revista Perspectivas*, 10(S1), 434–447. https://doi.org/10.22463/25909215.5623

Received: Agosto 30, 2025; Approved: Diciembre 21, 2025

RESUMEN

Palabras Clave:

Educación inicial, Formación docente, Enfoque STEAM, Habilidades cognitivas, Enseñanza interdisciplinar, Innovación educativa.

Este estudio documental y comparativo analiza el tratamiento del concepto de función en tres libros de precálculo ampliamente utilizados en educación superior, empleando el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), con foco en el subdominio Conocimiento de los Temas (KoT). A partir de matrices de 57 indicadores, se examinan cuatro categorías: procedimientos; definiciones, propiedades y fundamentos; registros de representación; y fenomenología. Los resultados muestran un predominio de la categoría “procedimientos” en los tres textos, con variaciones relevantes entre títulos. Se discuten fortalezas y vacíos en la construcción del conocimiento matemático que promueven los libros, especialmente en la articulación de múltiples registros semióticos y en la contextualización fenomenológica. Se brindan orientaciones para la selección crítica de textos y para el diseño de tareas que favorezcan un pensamiento variacional robusto. Se concluye con implicaciones para la formación docente y futuras líneas de investigación.

ABSTRACT

Keywords:

Functions, Specialized Knowledge, Mathematical Content Knowledge, Textbooks.

This documentary and comparative study analyzes the treatment of the function concept in three widely used precalculus textbooks in higher education, using the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model, with a focus on the Knowledge of Topics (KoT) subdomain. Based on a matrix of 57 indicators, four categories are examined (n=422 examples; 57 indicators; 4 KoT categories): procedures; definitions, properties, and foundations; representation registers; and phenomenology. The results show a predominance of the “procedures” category in the three texts, with relevant variations among titles. Strengths and gaps in the construction of mathematical knowledge promoted by the books are discussed, especially in the articulation of multiple semiotic registers and in phenomenological contextualization. Guidelines are provided for the critical selection of texts and for the design of tasks that favor robust variational thinking. The study concludes with implications for teacher training and future lines of research.

***Corresponding author.**
E-mail address: raulprada@ufps.edu.co (Raúl Prada Núñez)

Introducción

La idea de función se erige como una de las nociones más unificadoras y poderosas del pensamiento matemático. Su desarrollo a lo largo de la historia (superando dos milenios) refleja, dentro de un marco histórico general, la evolución de la disciplina de las matemáticas, desde una concepción antigua vinculada a la dependencia entre cantidades geométricas hasta una formulación analítica en los siglos XVII y XVIII con Leibniz y Euler, y en el siglo XIX a la definición moderna de Dirichlet como una correspondencia arbitraria entre conjuntos. La rica epistemología de la idea de función descrita por Kleiner (1989) refleja el papel central que desempeña dentro de la estructura de las matemáticas y la complejidad cognitiva anticipada involucrada en su aprendizaje.

Considerando su relevancia, el concepto de función ocupa una posición transversal y prioritaria dentro del currículo de matemáticas en todo el mundo. En el caso de Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (Mineducación) a través de las Directrices Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias, esboza el desarrollo del pensamiento algebraico, analítico y variacional desde la Educación Básica hasta la Educación Secundaria. Este pensamiento, que fundamenta el concepto de función, es necesario para que los estudiantes comprendan, modelen y den sentido a los fenómenos de cambio que involucran las ciencias naturales y sociales, y la vida cotidiana (Vargas et al., 2016). Por lo tanto, la función no solo es un objeto de estudio independiente, sino que también sirve como un recurso vital para acceder a conocimientos más avanzados, ya que es la puerta de entrada al cálculo diferencial e integral, y a otras disciplinas STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas).

La literatura en educación matemática demuestra que la enseñanza y aprendizaje de las funciones en nivel básico y medio presenta una serie de problemas y desafíos que son persistentes. A todos los niveles de formación educativa, y en la práctica, incluyendo la formación de profesores, se ha documentado la existencia de problemas en un amplio espectro y en una serie de niveles que son persistentes (Patiño et al., 2021; Gallo et al., 2017; Hernández et al., 2016; Prada et al., 2015). De entre esos problemas, uno de los más recurrentes es la tendencia a considerar las funciones y su enseñanza como sinónimos de la expresión algebraica, relegando a las tablas, las gráficas y el lenguaje verbal a un plano secundario o a la mera instrumentalidad (Prada et al. 2017; Hitt, 1998; Leinhardt et al., 1990). Las investigaciones de Nagle et al. (2013) y de otros autores confirman que los estudiantes suelen estar más cómodos con la manipulación de fórmulas, pero tienen dificultades para extraer o interpretar el significado de una gráfica o una tabla de datos. Esta "tiranía del álgebra" limita la comprensión conceptual, ya que, como argumenta Duval (2006), el entendimiento profundo de un objeto matemático solo es posible a través de la coordinación flexible y consciente de múltiples registros de representación semiótica. La incapacidad para transitar fluidamente entre, por ejemplo, la gráfica de una función y su correspondiente ecuación (conversión) o para manipular la función dentro de un mismo registro (tratamiento), constituye uno de los mayores obstáculos cognitivos, una dificultad que sigue vigente en las aulas (Duval, 2017).

Otras dificultades documentadas, y que la investigación reciente sigue explorando, incluyen la creencia arraigada de que todas las funciones deben ser continuas (Hernández Suárez et al., 2022), la concepción de la función como un mero proceso de cálculo o "máquina de entradas y salidas" sin llegar a verla como un objeto matemático en sí mismo (lo que Sfard, 1991) denominó el obstáculo de la reificación). Investigaciones como las de Makonye (2014) muestran que muchos estudiantes se estancan en la perspectiva procesal, lo que les impide, por ejemplo, comprender transformaciones de funciones (como f(x+a)) que requieren tratar a la función como un todo unificado. A esto se suma una frágil comprensión de sus propiedades fundamentales como el dominio, el rango, la inyectividad o la sobreyectividad (Akkoc & Tall, 2005; Vinner &

Dreyfus, 1989). Como señalaron Chaachoua y Saglam (2018), los estudiantes a menudo aplican algoritmos para encontrar el dominio o rango mecánicamente sin entender completamente qué representan esos conjuntos en el contexto de la función. Estas deficiencias, lejos de ser marginales, impactan negativamente en el desarrollo del pensamiento variacional, al impedir que los estudiantes hagan la transición del razonamiento estático y puntual a uno dinámico, que capta la esencia de la covariación entre las variables (Johnson et al., 2018).

La transición a la educación superior no siempre logra subsanar estas dificultades arrastradas desde la etapa escolar (Prada-Núñez et al., 2017). De hecho, es común observar que estudiantes universitarios de primeros semestres, en cursos de Precálculo y Cálculo, continúan presentando las mismas concepciones erróneas, lo que afecta directamente su desempeño académico y limita su capacidad para aplicar el concepto de función en la modelización de situaciones del mundo real en diversas disciplinas como la física, la economía o la ingeniería (Sofronas et al., 2011). En esta situación, los recursos didácticos empleados en el aula adquieren una relevancia importante, entre los cuales, el libro de texto sigue siendo uno de los más influyentes. Tal como lo han señalado investigadores como Fan et al. (2013), el texto no es solo un mero repositorio de contenidos. El texto actúa como el currículo potencialmente implementado mediando la transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado. Este recurso determina en gran medida no solo qué se enseña, sino también cómo se enseña: la secuencia de los temas, los ejemplos seleccionados, el tipo de tareas propuestas y el lenguaje utilizado. Investigaciones como las de Bayazit (2013) y Font y Godino (2006) han destacado que estos materiales no solo estructuran la práctica del profesor, sino que también moldean la forma en que los alumnos se relacionan con los conceptos matemáticos. Un libro que privilegie los procedimientos algorítmicos sobre la conexión entre representaciones, la resolución de problemas contextualizados es probable que fomente una comprensión fragmentada en sus lectores.

Evaluar cómo los libros de texto tratan un concepto fundamental como las funciones se convierte en un área urgente de investigación. Para analizar esto de manera sistemática y teórica, se necesita un marco que permita examinar el conocimiento matemático involucrado. El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) propuesto por Carrillo et al. (2018) proporciona una lente analítica apropiada para este propósito. El modelo MTSK, una evolución del marco PCK (Conocimiento Pedagógico del Contenido) de Shulman, tiene como objetivo caracterizar precisamente el conocimiento que es único para los profesores de matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Espinoza-Vásquez et al., 2025). Se divide en dos grandes dominios: Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK).

En este caso, este enfoque corresponde a un estudio documental-comparativo, por lo que la investigación se centra en el Conocimiento Matemático que sustenta la propuesta didáctica de tres libros de texto de precálculo ampliamente utilizados en la educación superior. En este caso, se centra en el subdominio del Conocimiento de los Temas (KoT) del MTSK, el cual, por un lado, se refiere al conocimiento a fondo del contenido matemático, de los procedimientos, las definiciones, las propiedades, los fundamentos, los registros de representación, la fenomenología y los motivos asociadas a los temas. La intención, en este sentido, es a través de este marco, identificar las similitudes y diferencias en la forma en que estos textos estudian las funciones reales. Se pretende caracterizar el conocimiento que se destaca en cada uno, de la cual se puede inferir las posibilidades de aprendizaje que en cada caso les puede estar propiciando u obstaculizando. En consecuencia, se espera que la investigación contribuya a construir una crítica sustantiva y justificada sobre los recursos que adquieren especial relevancia en los primeros cursos de matemática universitaria y que impacta directamente en la práctica docente y en la formación docente del profesorado.

Materiales y Métodos

Enfoque y diseño

El estudio se desarrolla bajo el paradigma cualitativo, el cual está definido como el intento sistemático de entender los fenómenos educativos y sociales, transformar las prácticas y los contextos, guiar la toma de decisiones y generar conocimiento organizado (Sandín, 2013). En este sentido, este enfoque: (a) centra la atención en el contexto natural en el que ocurren los fenómenos, (b) aborda de manera holística la experiencia de los participantes, y (c) considera al investigador como el primer contacto con la realidad, a quien se le exige el mayor grado de interacción. Esto se debe a que la investigación es de tipo interpretativa: el investigador sistematiza, justifica y desarrolla la integración de los hallazgos en ciertos marcos teóricos, y a la vez, trata de entender la experiencia de los actores desde sus significados y sus percepciones.

Metodológicamente, es una investigación documental centrada en el análisis de información, captura, selección, caracterización y síntesis de contenido para explorar significados e implicaciones en contextos específicos (Dulzaires & Molina, 2004). Se incorpora, además, una perspectiva comparativa para considerar diversos puntos de vista (Hantrais & Mangen, 1996) y examinar similitudes y diferencias incluidas posibles dicotomías en políticas y prácticas educativas (Shimizu & Kaur, 2013). Las categorías del instrumento de análisis combinan elementos tomados de investigaciones previas con otros derivados directamente de la forma en que los libros de texto abordan el estudio de las funciones.

Población, muestra y criterios de selección

La población documental está conformada por libros de precálculo referenciados en la biblioteca de la Universidad de Nariño. La selección consideró relevancia, accesibilidad y representatividad institucional, privilegiando los textos con mayor frecuencia de uso por docentes del programa de Licenciatura en Matemáticas que imparten cursos básicos en matemáticas, ingenierías y áreas afines. Para ello, se realizó un censo entre profesores con al menos dos semestres consecutivos dictando la asignatura; mediante llamadas telefónicas se identificaron los textos más comunes para la enseñanza de funciones en cursos iniciales universitarios.

El universo de informantes lo constituyen 22 docentes del Departamento de Matemáticas y Estadística. Se trabajó con muestreo intencional (Merriam & Tisdell, 2015), contactando a 15 docentes activos en 2024-I; se obtuvo una tasa de respuesta del 86,7% (13/15). Criterios de inclusión: (i) experiencia en precálculo (álgebra, trigonometría, geometría analítica), asegurando correspondencia con el contexto de uso de los textos; (ii) disponibilidad y consentimiento, mediante encuesta telefónica con preguntas cerradas (textos preferidos) y abiertas (justificaciones pedagógicas); (iii) representatividad institucional, considerando la condición pública y el contexto regional de la Universidad de Nariño, donde se priorizan textos en español y de bajo costo. La homogeneidad experta de la muestra favoreció la saturación cualitativa. Los resultados muestran recurrencia en tres textos (Swokowski & Cole; Allendoerfer; Zill & Dewar), mencionados por el 86,7% de los encuestados, lo que valida su relevancia como corpus principal.

Sesgos y limitaciones

Se identificaron sesgos asociados a: (a) disponibilidad bibliotecaria (preferencia por Swokowski & Cole, Allendoerfer, Zill & Dewar); (b) idioma (exclusión de textos en inglés como Stewart o Larson); y (c) efectos de instrumento (cuestionarios que favorecen textos “oficiales” o más recordados). Estos sesgos pueden restringir la diversidad de enfoques y la incorporación de recursos digitales o más avanzados. En cuanto a la generalización, el estudio centrado en 15 docentes de una institución específica ofrece validez interna alta por la tasa de respuesta, pero su extrapolación a otros contextos es limitada; además, la menor consideración de accesibilidad digital y de variaciones culturales podría no reflejar necesidades de entornos remotos ni actualizaciones de ediciones.

Textos priorizados

Para analizar el ecosistema de precálculo se priorizaron:

1. Swokowski & Cole, Álgebra y trigonometría con geometría analítica: equilibrio entre fundamentos algebraico–trigonométricos y accesibilidad.

2. Allendoerfer, Matemáticas Universitarias (4.ª ed.): integración clara de conceptos básicos.

3. Zill & Dewar, Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3.ª ed.): progresión lógica hacia geometría analítica.

Su elección responde a su recurrencia en los cursos iniciales, alineación con un currículo que enfatiza funciones y su disponibilidad en español y en la biblioteca (varios también en formato digital). Se excluyeron textos como Stewart y Larson por mayor complejidad y menor ajuste al nivel de precálculo básico.

Unidades de análisis

El foco recae en los ejemplos de los capítulos dedicados a funciones. La ejemplificación contextualiza y clarifica lo que se pretende enseñar (Liñán et al., 2016) Los ejemplos pueden: generalizar, ilustrar principios, motivar, mostrar variación, enseñar técnicas o servir de base para construir/refutar pruebas (Watson & Mason, 2002). Aunque fundamentales, su selección y enfoque son complejos (Zaslavsky & Peled, 1996). Se analizaron todos los ejemplos pertinentes, tipificados como:

1. Genéricos (clases generales mediante instancias);

2. Trabajados (procedimientos resueltos paso a paso);

3. Conceptuales (conexión de nociones para fomentar intuición);

4. Iniciales o de arranque (introducen definiciones o intuiciones);

5. Prácticos o aplicados (traslado de conceptos a problemas concretos).

Fases de la investigación

1. Apropiación conceptual y curricular de funciones: revisión matemática y curricular; mapeo de literatura especializada de los últimos nueve años.

2. Marco teórico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: clasificación y construcción del marco sobre conocimiento del contenido (KoT) asociado a funciones.

3. Selección de unidades de análisis: discriminación de los tres textos, identificación de capítulos y caracterización preliminar de la estructura de ejemplos.

4. Recolección y organización de datos: lectura exhaustiva, página a página, de capítulos sobre funciones y contraste con el marco teórico.

5. Discusión de resultados.

6. Conclusiones.

Este diseño integra análisis documental, comparación sistemática y categorización de ejemplos, ofreciendo una mirada contextualizada y robusta sobre cómo los textos de precálculo abordan el estudio de las funciones.

Resultados y Discusión

El análisis de los 422 ejemplos extraídos de los tres libros de texto seleccionados revela un claro predominio de la categoría de Procedimientos. A continuación, se presenta una tabla-resumen con los porcentajes de cada categoría del Conocimiento de los Temas (KoT) por libro, junto con ejemplos ilustrativos.

Tabla I. Distribución porcentual de las categorías KOT por libro de texto.

Libro de Texto	Procedimientos	Definiciones/ Propiedades/ Fundamentos	Registros de Representación	Fenomenología
Allendoerfer	65%	15%	12%	8%
Swokowski & Cole	72%	10%	10%	8%
Zill & Dewar	68%	12%	15%	5%

Nota. Los porcentajes se calcularon a partir de la codificación de 422 ejemplos extraídos de los capítulos dedicados a funciones en cada libro. El software utilizado para el análisis fue MAXQDA 2022.

La Tabla revela un hallazgo muy significativo y, lamentablemente, común en los materiales de enseñanza de las matemáticas.

Interpretación desde la Educación Matemática

El análisis cuantitativo presentado en la Tabla I ofrece una radiografía clara sobre el tipo de conocimiento matemático que estos libros de texto privilegian. La conclusión principal e inequívoca es el abrumador predominio del conocimiento procedimental en el tratamiento del concepto de función. Los tres textos analizados dedican entre el 65% y el 72% de sus ejemplos a la ejecución de algoritmos, reglas y técnicas. Esta hegemonía del "saber hacer" sobre el "saber por qué" tiene profundas implicaciones pedagógicas y cognitivas. A continuación, se interpreta este resultado a la luz de algunos marcos teóricos centrales en la Educación Matemática:

Comprensión Instrumental vs. Comprensión Relacional. El teórico Skemp (1976) distinguió entre dos tipos de entendimiento: a) Comprensión Instrumental: Se refiere a la capacidad de usar reglas sin entender las razones detrás de ellas. Es el "saber cómo"; b) Comprensión Relacional: Implica saber qué hacer y por qué, conectando los conceptos con una estructura matemática más amplia.

Los datos de la tabla sugieren fuertemente que estos libros de texto promueven una comprensión instrumental. Se enseña a los estudiantes a realizar operaciones como, por ejemplo, "encontrar el dominio de pero las bajas puntuaciones en "Definiciones/Propiedades/Fundamentos" (entre 10% y 15%) indican que se dedica poco espacio a construir el andamiaje conceptual necesario para una comprensión relacional. Esto puede generar estudiantes que son eficientes en la resolución de ejercicios tipo, pero que se bloquean ante problemas no rutinarios o que requieren una comprensión más profunda del objeto función tal como se refiere en el trabajo de Prada et al. (2017).

La Falta de Articulación entre Registros de Representación. Una de las preocupaciones más graves es el escaso porcentaje que se les asigna a los ‘Registros de Representación’ (entre 10% y 15%). Para Raymond Duval (2006), una de las características más sobresalientes de la comprensión en matemáticas es la capacidad de coordinar y transformar información a través de diversos registros semióticos (algebraico, gráfico, tabular, verbal). Un texto que dedica tan poco a esta dimensión está, sin duda, limitando el desarrollo de una de las actividades cognitivas más vitales para el aprendizaje de las funciones. El texto se arriesga a: a) Reforzar la “tiranía del álgebra”: los estudiantes casi siempre asocian la función con su fórmula, y b) Limitar la flexibilidad del pensamiento: No se construyen las destrezas para seleccionar el registro más conveniente para resolver un problema, o para interpretar la misma información desde distintos ángulos. Como, por ejemplo, observar la pendiente de una recta en su ecuación y en su gráfica. La flexibilidad, que Adu-Gyamfi y Bossé (2014) mencionan, es vital para un dominio conceptual de las matemáticas.

Desconectado de la Realidad y el Origen del Concepto. La categoría de puntuación más baja es "Fenomenología" (entre 5% y 8%). Dentro del contexto del modelo MTSK, la fenomenología es el estudio de las situaciones y fenómenos que originan y dan sentido a los conceptos matemáticos. Tal presencia marginal de la fenomenología comunica que las funciones se presentan como un constructo abstracto, disociado de las situaciones reales del mundo de cambio y variación que dieron origen a las funciones. Esto es inconsistente con los principios de la Educación Matemática Realista (RME). Hans Freudenthal, el fundador del RME, argumentó que las matemáticas deben aprenderse como la actividad de acción humana de abstracción realista (Gravemeijer & Terwel, 2000). No explorar los fenómenos del mundo real que modelan las funciones (movimiento, crecimiento poblacional, relaciones económicas, etc.) es profundamente perjudicial para la posibilidad de que el aprendizaje sea significativo y, por lo tanto, motivador.

En segundo lugar, tal como se revela en la Tabla 1, los libros de texto en cuestión promueven una visión de las funciones reduccionista, algorítmica y descontextualizada. Aunque este enfoque puede conducir a la obtención de éxito en la resolución de problemas mecánicos, resulta insuficiente para desarrollar el pensamiento variacional y el entendimiento profundo y flexible del concepto de función. Para autores como Anna Sfard (1991), este énfasis en los procedimientos mantiene a los estudiantes en una concepción procesal de la función, que dificulta el salto hacia la cognición de la función como objetual (reificación), es decir, como una entidad matemática sobre la cual se puede operar y razonar. Así, los resultados no solo cuantifican el contenido de los textos, sino que alertan sobre un modelo pedagógico que, de acuerdo con la literatura sobre el tema, puede estar agravando las dificultades de aprendizaje.

Ejemplos Ilustrativos:

- *Consigna:* "Dada la función $f(x)=2x+1$, encuentre el valor de $f(3)$".

- *Solución:* Se sustituye x por 3 en la fórmula: $f(3)=2(3)+1=7$

- *Conversión/Tratamiento:* Este ejemplo corresponde a un tratamiento dentro del registro algebraico, donde se aplica un procedimiento de sustitución y cálculo.

Tratamiento de Registros Semióticos (TRS) Operativo

Para ilustrar cómo los textos trabajan (o no) la conversión entre registros, se presentan a continuación tres casos.

Caso 1: Verbal a Algebraico

- *Consigna:* "El costo de producir x unidades de un artículo es de \$10 por unidad más un costo fijo de \$500".

- *Conversión:* $C(x)=10x+500$

- *Dificultad reportada en la literatura:* Los estudiantes a menudo tienen dificultades para identificar la variable independiente y la dependiente, y para traducir el lenguaje natural a una expresión algebraica.

Caso 2: Algebraico a Gráfico

- *Consigna:* "Grafique la función

- *Conversión:* Se genera una tabla de valores y se plotean los puntos en el plano cartesiano para obtener la parábola.

- *Dificultad reportada en la literatura:* La tendencia a graficar por puntos sin comprender la forma global de la función o sus propiedades (vértice, eje de simetría).

Caso 3: Gráfico a Algebraico

• *Consigna:* "Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5)".

• *Conversión:* A partir de la gráfica o los puntos, se calcula la pendiente y se utiliza la forma punto-pendiente para hallar la ecuación.

• *Dificultad reportada en la literatura:* Dificultad para interpretar la pendiente y la ordenada al origen a partir de la gráfica.

Además de realizar procedimientos, la construcción de conocimiento matemático sólido depende de la comprensión de algunas de sus partes formales: las definiciones que cierran un concepto, las propiedades que describen su funcionamiento, y los fundamentos que avalan su justificación. Sobre el concepto de función, la forma en que un texto escolar presenta estos tres ejes del Conocimiento de los Temas (KoT) puede determinar que el estudiante construya una imagen mental amplia y coherente o, en cambio, una simple colección de hechos sueltos (Zeynivandnezhad & Saralar-Aras, 2024). La tabla que sigue este párrafo ofrece una muestra cualitativa de cómo los tres textos que fueron analizados abordan la función, el tratamiento de sus propiedades y la inclusión de fundamentos demostrativos de orden lógico, poniendo en evidencia diferentes concepciones respecto de cómo se debería presentar un conocimiento matemático.

Tabla II. Muestra de definiciones, propiedades y fundamentos en los textos

ibro de Texto	Definición Formal de Función	Propiedades (Dominio/Rango, Inyectividad)	Fundamentos (Axiomática/Demostraciones)
Allendoerfer	Presenta una definición formal basada en conjuntos.	Dedica una sección a la explicación detallada de dominio, rango e inyectividad, con ejemplos.	Incluye algunas demostraciones sencillas de propiedades.
Swokowski & Cole	Introduce la función de manera más intuitiva, como una "regla".	Explica las propiedades de forma procedimental, con énfasis en el cálculo.	Prácticamente ausente.
Zill & Dewar	Similar a Swokowski & Cole, con un enfoque en la "máquina de funciones".	Las propiedades se introducen a través de ejemplos resueltos.	Ausente.

La Tabla II muestra una diferencia fundamental en los enfoques epistémicos de los estudiantes hacia el texto, que puede ser examinada a través de tres lentes teóricos en Matemáticas Educativas.

Imagen Conceptual vs. Definición Conceptual. Los enfoques intuitivos y formales difieren. Vinner y Tall (1981) articulan dos dimensiones de un concepto: a) Definición Conceptual, que es la definición formal y matemática de un concepto; y b) Imagen Conceptual, que es toda la estructura cognitiva relacionada con un concepto, que incluye imágenes mentales, muestras, no muestras y experiencias. El texto de Allendoerfer prioriza la Definición Conceptual y presenta funciones utilizando un lenguaje más formal de la teoría de conjuntos. Su objetivo es establecer una sólida base lógica desde el principio. En contraste, Swokowski & Cole y Zill & Dewar construyen una Imagen Conceptual inicial con analogías intuitivas como la “regla” o la “máquina de funciones.” Esta diferencia es significativa porque aunque el enfoque intuitivo puede ser más fácil de acceder desde el inicio, puede resultar en imágenes conceptuales limitadas e incluso incorrectas si la explicación se alinea formalmente después.

Por ejemplo, la noción de "máquina" puede fortalecer una visión puramente procedimental de la función, dificultando concebirla como un objeto matemático (Sfard, 1991). La falta de conexión entre la Imagen Conceptual y la Definición Conceptual es una de las principales fuentes de conflicto cognitivo y dificultades de aprendizaje en los estudiantes.

Conocimiento conceptual contra conocimiento procedimental (Hiebert & Lefevre). La manera en que se exponen las propiedades (dominación, rango, entre otras) también revela mucho. James Hiebert y Patricia Lefevre (1986) definieron lo siguiente: a) El conocimiento conceptual: se trata de un conocimiento que es rico en relaciones y en conexiones, que integran un entramado coherente, y b) El conocimiento procedimental: se refiere al conocimiento de los pasos secuenciales o de los algoritmos para resolver una tarea. Allendoerfer, al dedicar secciones a la "explicación detallada," pretende construir conocimiento conceptual. Por el contrario, Swokowski & Cole y Zill & Dewar defienden el conocimiento procedimental, al presentar las propiedades a su aplicación directa en cálculos y ejemplos resueltos. Este último enfoque puede hacerle llegar al estudiante a "encontrar el dominio" sin una comprensión de a qué se refiere el dominio. Ambos tipos de conocimiento son necesarios; sin embargo, un aprendizaje que se enfoque excesivamente en la ejecución de un procedimiento, sin un conocimiento conceptual fuerte, se traduce en un aprendizaje deficiente y en una escasa transferibilidad.

Con respecto ***a la justificación y a la demostración (Hanna & de Villiers).*** La visión de las matemáticas como un producto terminado, y no como un proceso de razonamiento y justificación, se evidencia en la ausencia casi total de "fundamentos" en 2 de los 3 libros.

Hanna (2000) y de Villiers (1990) han señalado que el papel de la demostración en la educación no se limita a la simple verificación de la verdad de un enunciado. Además de ello, las demostraciones ayudan a explicar (¿por qué es verdadero?), a sistematizar (organizar resultados en un sistema deductivo) y a estimular el descubrimiento. Al, incluso, omitir las demostraciones más sencillas, Swokowski & Cole y Zill & Dewar, en sus textos, presentan las propiedades de las funciones como reglas arbitrarias que se deben memorizar, y no como consecuencias lógicas que se comprenden. Esto priva a los estudiantes de la oportunidad de razonamiento en matemáticas y de apreciar la consistencia y la estructura en esta disciplina. El enfoque, aunque modesto, de Allendoerfer es un punto de partida, en el sentido que al menos introduce la idea de que las afirmaciones en matemáticas deben ser justificadas.

A la luz de lo que se ha dicho, se puede sostener que la Tabla 2 muestra que, en el caso de un texto, se intenta construir una base formal y conceptual, mientras que los otros dos privilegian un enfoque intuitivo y procedimental, que, aunque pueda parecer más accesible, ciertamente contribuye a una comprensión más superficial y segmentada del concepto de función, carente de la riqueza formal y la estructura que lo caracteriza.

Conclusiones

Derivado del estudio detallado sobre el tratamiento del concepto de función en los tres libros de texto de precálculo, este estudio permite señalar las siguientes conclusiones principales:

Predominancia de un Modelo de Enseñanza Procedimental y Algorítmico. La hegemonía del conocimiento procedimental ante el texto analizado es el hallazgo más contundente de esta investigación. Con más del 70% de concentración en la categoría "Procedimientos", los textos privilegiaron una enseñanza centrada en el "saber hacer", mientras que las esferas conceptuales, representacionales y fenomenológicas del conocimiento matemático quedaron relegadas. Esta cercanía, aunque dotará a los estudiantes de herramientas que les permitan la resolución de ejercicios rutinarios, entender el procedimiento de una forma instrumental, es, por demás, dañina, ya que les resta la capacidad de transferencia a situaciones nuevas y de construir un entendimiento relacional y profundo sobre el porqué de los procesos matemáticos.

Fragmentación del Concepto de Función debido a Representaciones Mal Integradas. La insuficiente atención prestada a los Registros de Representación fue una de las principales debilidades didácticas identificadas. Al no promover sistemáticamente la conversión y el manejo de diversas representaciones semióticas, los textos impiden el desarrollo de una comprensión integrada del objeto función. Esta deficiencia exacerba la llamada tiranía del álgebra, obstaculizando a los estudiantes en el desarrollo de una imagen conceptual que sea rica y flexible, proporcionando así una visión fragmentada del concepto que es una fuente bien conocida de dificultades de aprendizaje.

Desvinculación del Conocimiento Matemático de su Contexto y Fundamento Lógico. La marginal presencia de la Fenomenología y de los Fundamentos (prácticamente ausentes en dos de los tres textos) revela una tendencia a presentar la función como un producto abstracto y arbitrario, despojado tanto de las situaciones del mundo real que le dan sentido como de la estructura lógica que lo sostiene. Este enfoque descontextualizado contradice los principios de un aprendizaje significativo y priva a los estudiantes de la oportunidad de experimentar las matemáticas como una ciencia deductiva y de razonamiento. El resultado es la promoción de una imagen de las matemáticas como un conjunto de reglas a memorizar, en lugar de un sistema coherente a comprender.

Implicaciones para la Práctica Docente y la Selección de Materiales. Los docentes de precálculo y cálculo deben considerar las implicaciones de este estudio. Los hallazgos sugieren que el texto no debe ser considerado currículo como tal y que debe ser tratado críticamente. Los docentes deben al menos diseñar actividades que busquen trabajar la conexión de registros, promoviendo el debate sobre definiciones y propiedades, así como la modelización de fenómenos reales. Más aún, este análisis sugiere el uso de un marco (el KoT del modelo MTSK) como instrumento que permita a las instituciones y a los docentes realizar una selección de textos y evaluación más consciente, que dé un texto currículo que contenga un mayor equilibrio epistémico que se alinee a los propósitos de la comprensión profunda de las matemáticas.

Este estudio tiene limitaciones y dentro de este contexto deben ser consideradas las conclusiones. Hay un posible sesgo de selección, ya que los textos se eligen por ser populares. Además, el análisis se centra en textos en español, por lo que se limita la generalización a otras realidades lingüístico-culturales. El alcance de los hallazgos podría fortalecerse contando con una muestra más amplia y diversa de textos.

Líneas Futuras de Investigación. Se recomienda para futuras investigaciones la construcción de rúbricas para evaluar la calidad del registro de representación en los libros de texto. También sería útil ampliar el corpus de análisis para incluir textos de circulación internacional, como los de Stewart o Larson, con el fin de comparar los patrones identificados. Replicar este estudio en otras universidades y utilizar ediciones más recientes de los textos ayudaría a confirmar la consistencia de los hallazgos y los cambios a lo largo del tiempo.

Referencias

Adu-Gyamfi, K., & Bossé, M. J. (2014). Understanding and improving mathematical representations: The case of functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(6), 827–843. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.883993

Akkoc, H., & Tall, D. (2005). A mismatch between curriculum design and student learning: The case of the function concept. *In Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 33–40). PME.

Allendoerfer, C. B. (1985). *Principios de matemática moderna*. México: McGraw-Hill.

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, F. J., &

Guzmán, A. (2024). Comparing the finite and infinite limits of sequences and functions: A mathematical and phenomenological analysis. *Pythagoras*, 45(1). https://doi.org/10.4102/pythagoras.v45i1.774

Bayazit, I. (2013). Quality of the tasks in Turkish middle school mathematics textbooks: The case of geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(3), 651–680. https://doi.org/10.1007/s10763-012-9353-8

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo-Yáñez, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Montes, M., Muñoz-Catalán, M. C., Ribeiro, M., Rojas, N., & Zakaryan, D. (2018). Advances in the understanding of the MTSK model in mathematics education. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 254–271. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479982

Chaachoua, H., & Saglam, Y. (2018). Students' understanding of function concept: Analysis through representations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(1), 1–22. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1338594

Delgado, R., & Zakaryan, D. (2024). The complex and integrated nature of a mathematics lecturer's specialized knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(8), 1896–1913. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2102546

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2019). Exemplifying mathematics teacher's specialised knowledge in university teaching practices. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University*, Utrecht, Netherland. https://hal.science/hal-02430462

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations. *Switzerland: Springer*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Dulzaires, Y., & Molina, M. (2004). Análisis documental y de información: dos componentes de un mismo proceso. *ACIMED*, 12(2), 1-5.

Espinoza-Vásquez, D., Carrillo-Yáñez, J., & Muñoz-Catalán, M. C. (2025). Aplicaciones contemporáneas del modelo MTSK en la formación del profesorado de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 28(1), 45–63.

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., & Carrillo-Yáñez, J. (2017). Use of analogies in teaching the concept of function: Relation between knowledge of topics and knowledge of mathematics teaching. *CERME 10*. https://hal.science/hal-01949154/document

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 633–646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Flores-Medrano, E., & Gómez-Arroyo, D. (2022). What knowledge do teachers need to predict the mathematical behavior of students? Mathematics, 10(16), 2933. https://doi.org/10.3390/

math10162933

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La enseñanza de las matemáticas como actividad de modelización y comunicación. *Revista EMA*, 11(2), 267–283.

Gallo, M., Prada, R., & Hernández, C. (2017). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en educación superior. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 7(2), 169–182. https://doi.org/10.19053/20278306.v7.n2.2017.6075

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777–796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44(1–2), 5–23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hantrais, L., & Mangen, S. (1996). *Cross-national research methods in the social sciences*. London: Pinter Publishers.

Hernández, C., Gallo, M., & Prada, R. (2016). Concepciones erróneas sobre funciones en estudiantes universitarios. *Revista Científica*, 24(2), 123–137.

Hernández, C., Prada, R., & Gallo, M. (2022). Continuidad y discontinuidad: Creencias persistentes sobre el concepto de función. *Revista Colombiana de Educación Matemática*, 3(1), 51–66.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the coordination of different representations in the function concept. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 123–134.

Johnson, H. L., Thomas, M., & Taylor, C. (2018). Reasoning about covariation in dynamic situations. *Educational Studies in Mathematics*, 99(1), 35–54. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9823-8

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4), 282–300. https://doi.org/10.1080/07468342.1989.11973383

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64. https://doi.org/10.3102/00346543060001001

Liñán, M. M., Contreras, L. C., & Barrera, V. J. (2016). El conocimiento del contenido matemático (KoT) del profesor de matemáticas. In M. Pino-Fan, J. Carrillo, & N. Climent (Eds.), *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Avances y perspectivas del modelo MTSK* (pp. 81–98). Universidad de Huelva.

Makonye, J. P. (2014). Student teachers' understanding of function transformations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(3), 439–452. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.837527

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4th ed.). Jossey-Bass.

Montes, M., Chico, J., Martín-Díaz, J. P., & Badillo, E. (2024). Mathematics teachers' specialized knowledge mobilized through problem transformation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 74, 101188. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101188

Nagle, C., Moore-Russo, D., & Styers, J. (2013). Student understanding of multiple representations of function. *Mathematics Education Research Journal,* 25(1), 55–78. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0062-1

Patiño, L., Gallo, M., & Prada, R. (2021). Dificultades conceptuales sobre el objeto función en formación inicial docente. *Revista Científica*, 40(1), 103–119.

Prada, R., Hernández, C., & Gallo, M. (2015). Concepciones de los estudiantes sobre la noción de función en cursos de precálculo. *Revista Científica*, 23(2), 89–102.

Prada, R., Hernández, C., & Gallo, M. (2017). El conocimiento matemático en la enseñanza de las funciones: Una mirada desde la educación superior. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 50, 100–124. https://revistavirtual.ucn.edu.co

Sandín, M. P. (2013). *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones*. McGraw-Hill.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Semanišinová, I., & Slabý, M. (2022). The specialized knowledge of middle school teachers concerning the concept of function. *Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia Cracoviensia*. https://bibliotekanauki.pl/articles/32443981.pdf

Shimizu, Y., & Kaur, B. (2013). Studying mathematics classroom across cultures: Challenges and possibilities. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(1), 1–3. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0464-6

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.

Sofronas, K., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., & Swaminathan, R. (2011). *Assessing conceptual understanding of functions in precalculus. School Science and Mathematics*, 111(6), 271–279. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00088.x

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (12.ª ed.). Cengage Learning.

Vargas, L., Gallo, M., & Prada, R. (2016). Pensamiento variacional en el currículo colombiano: Avances y desafíos. *Revista Colombiana de Educación Matemática*, 3(2), 59–72.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366. https://doi.org/10.2307/749441

Vinner, S., & Tall, D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Watson, A., & Mason, J. (2002). *Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics*. Oxford University Press.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 67–78. https://doi.org/10.2307/749198

Zeynivandnezhad, F., & Saralar-Aras, F. (2024). Conceptual and procedural understanding of function definitions in university textbooks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 27(2), 255–273. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09577-1

Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2010). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (5.ª ed.). McGraw-Hill.