La Similaridad en los Grupos Clásicos

Luis Ignacio Lizcano Bueno
Profesor Titular
Dpto. de Sistemas e
Informática U.F.P.S.

La similaridad entre dos transformaciones lineales A y B se dá si existe una transformación lineal P inversible tal que $B = P^{-1}{}_o A_o P$.

Este problema tiene varias soluciones tales como la forma normal de Jordan, la forma normal racional y la forma normal polinomial. Formas normales que teóricamente están garantizadas, pero cuyo proceso no es algorítmico

Utilizando la teoría del producto tensorial se ha encontrado un enunciado que resuelve el probiema de la similaridad mediante un proceso algorítmico. A partir de esta visión en este artículo se formaliza una teoría general al problema de la similaridad en los grupos especiales, utilizando el concepto de conjugación.

1. ALGEBRA DE TRANSFORMACIONES

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, L el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en si mismo, A y B elementos de L y a un elemento de K, entonces las operaciones A + B, a.A y $A_o B$ para todo x en V están definidas por:

$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$
$(a.A)(x) = a.A(x)$
$(A_o B)(x) = A(B(x))$

L es un espacio vectorial con respecto a la suma y a la multiplicación escalar, la composición es asociativa y satisface las siguientes condiciones:

$(A_1+A_2)_o B= A_{1\,o} B + A_{2\,o} B,\ A_o (B_1 + B_2)= A_o B_1 + A_o B_2$
$a.(A_o B) = (a.A)_o B = A_o (a.B)$
Para A_1, A_2, B_1, B_2, A y B en L y todo a en K.

Por tanto se puede afirmar que L es un álgebra asociativa.
Si V es un espacio vectorial n-dimensional sobre K con n finito. Entonces L es un espacio vectorial de dimensión n^2 sobre K. Si $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$es una base para V, el conjunto de transformaciones lineales $\{A_{ij}\}$tales que $A_{ij}(a_i) = a_i$ y $A_{ij}(a_r) <> 0$ si $r <> i$ para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ forman una base para L.

Si A está en L, entonces se puede afirmar que $A(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot a_i$ donde

$1 \leq i \leq n$ y $P = (p_{ij})$ es la matriz de la transformación A relativa a la base $\{a_i\}$. La correspondencia A ---------> P es un isomorfismo de L sobre el álgebra M(K) de matrices con componentes p_{ij} en K.

El álgebra L es llamada el álgebra asociativa de endomorfismos lineales en V. Cualquier sub-álgebra L_1 de L es un subespacio vectorial de L que es cerrado bajo la multiplicación. Un álgebra asociativa Q se llama un álgebra de Lie, si la multiplicación satisface las siguientes condiciones

$A^2 = 0$
$(A_o B)_o C + (B_o C)_o A + (C_o A)_o B = 0$

Para todo A, B, C, en Q, ésta última condición se denomina la igualdad de Jacobi.

Es bien conocido el hecho, que si M es un álgebra asociativa se puede definir el producto de Lie de A y B elementos de M así:

$[A,B] = A_o B - B_o A$

Este producto satisface las siguientes condiciones

$[A_1 + A_2, B] = [A_1, B] + [A_2, B]$
$[A, B_1 + B_2] = [A, B_1] + [A, B_2]$
$a.[A, B] = [a.A, B] = [A, a.B]$

Para todo a en K. Por otra parte

$[A,A] = A^2 - A^2 = 0$, y
$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = (A_o B - B_o A)_o C - C_o (A_o B - B_o A) + (B_o C - C_o B)_o A - A_o (B_o C - C_o B) + (C_o A - A_o C)_o B - B_o (C_o A - A_o C) = 0$

El álgebra de Lie así obtenida se denomina el álgebra de Lie asociada al álgebra M y se nota por M_L. Cualquier sub-álgebra U de M_L es llamada un álgebra de Lie de transformaciones lineales. Se puede mostrar que cada álgebra de Lie es isomorfa a una subálgebra Q de Lie, siendo Q un álgebra asociativa. Lo cual es equivalente a afirmar que cada álgebra de Lie es isomorfa a un álgebra de Lie de transformaciones lineales.

2. SIMILARIDAD EN LOS GRUPOS LINEALES

La similaridad en el grupo especial lineal es un problema de conjugación en él, o en su álgebra de Lie asociada, por que dos elementos de un álgebra de Lie se dicen que son conjugados si existe un automorfismo propio en el álgebra de Lie que envia uno en el otro.

Se define una forma no degenerada simétrica o antisimétrica como sea V un espacio vectorial de dimensión finita, G el conjunto de todas las transformaciones T en Gl (V) tal que $(T(v_1), T(v_2)) = (v_1, v_2)$ para todo v_1 y v_2 en V, se puede asociar a esta forma el álgebra de Lie L de todas las transformaciones T en End (V), tal que $(T (v_1), v_2) = - (v_1 , T(v_2))$ para todo v_1 y v_2 en V. De esta forma L es el álgebra de Lie correspondiente al grupo El siguiente resultado fue dado por Freudenthal.

Sea (,) una forma no degenerada simétrica o antisimétrica de un espacio V de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica diferente a 2, G el sub-grupo de GL(V) que preserva la forma y L la sub-álgebra de Lie de End(V) de elementos antisimétricos con respecto a la forma. Con base a lo anterior se puede concluir que: Si A y B son elementos de G ó de L. Entonces $D \circ A \circ D^{-1} = B$ para algún D en GL(V) si, y solo si, $D \circ A \circ D^{-1} = B$ para algún D en G.

Es importante precisar la definición de transpuesta en End(V) con respecto a la forma. Sea T un elemento de End(V) entonces T^t bajo la forma está definida por $(T(x),y)= (x,T^t (y))$ para todo x, y en V. Lo cual implica que si se esta en el grupo G, se tiene

$$\begin{aligned}(v_1, v_2) &= (T (v_1), T(v_2)) \\ &= (v_1 , T^t \circ T (v_2))\end{aligned}$$

por tanto $T^t = T^{-1}$
Mientras que si se está en el álgebra de Lie se tiene

$$\begin{aligned}(T (v_1), V_2) &= - (v_1, T (v_2)) \\ &= (v_1, T^t (v_2)) \\ &= (v_1, - T(v_2)) \\ &= (v_1, T^t (v_2))\end{aligned}$$

entonces $T^t = -T$

Para la demostración se considera $D \circ A \circ D^{-1} = B$ para algún D en GL(V), al aplicar la transpuesta se obtiene

$$- (D^t)^{-1} \circ A \circ D^t = -B \text{ , ó ,}$$
$$(D^t)^{-1} \circ A^{-1} \circ D^t = B^{-1}$$

dependiendo de que A y B pertenezcan a L o a G. En cualquier caso siempre se tiene que $(D^t)^{-1} \circ A \circ D^t = B$

Sea $S = D^{-1} \circ (D^t)^{-1}$, entonces S está en GL(V) y,

$$\begin{aligned}S^t &= (D^{-1} \circ (D^t)^{-1})^t \\ &= ((D^t)^{-1})^t \circ (D^{-1})^t \\ &= D^{-1} \circ (D^t)^{-1} \\ &= S\end{aligned}$$

además $S \circ A = A \circ S$, en efecto ya que como

$$D \circ A \circ D^{-1} = B,$$

luego $A \circ D^{-1} = D^{-1} \circ B$

por tanto

$$\begin{aligned}S \circ A \circ D^t &= D^{-1} \circ (D^t)^{-1} \circ A \circ D^t \\ &= D^{-1} \circ B\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}A \circ S \circ D^t &= A \circ D^{-1} \circ (D^t)^{-1} \circ D^t \\ &= A \circ D^{-1}\end{aligned}$$

por tanto

$$S \circ A \circ D^t = A \circ S \circ D^t$$

lo cual implica que

$$S \circ A = A \circ S.$$

Entonces para cualquier polinomio p(S) se tiene que
$p(S) \circ A = A \circ p(S)$.

Como S es el producto de la aplicación D^{-1} con su conjugada, entonces S es una aplicación simétrica no negativa, por tanto existe una aplicación simétrica T no negativa, tal que $T^2 = S$, luego $T^t = T$ y T es no singular ya que $0 <> |S| = |T^2|$, luego $|T| <> 0$

Además se tienen los siguientes hechos: $T^2 = S = D^{-1} \circ (D^t)^{-1}$ luego
$T \circ D^T = T^{-1} \circ D^{-1}$

y además

$$\begin{aligned} T \circ A &= T^{-1} \circ D^{-1} (D^t)^{-1} \circ A \\ &= T^{-1} \circ S \circ A \\ &= T^{-1} \circ T^2 \circ A \\ &= T \circ A \end{aligned}$$

finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} &(T \circ D^t) \circ A \circ (T \circ D^t) \\ &\quad = D \circ T^t \circ A \circ T \circ D^t \\ &\quad = D \circ A \circ T^2 \circ D^t \\ &\quad = D \circ A \circ (D^t)^{-1} \circ D^t \\ &\quad = D \circ A \circ D^{-1} \\ &\quad = B \end{aligned}$$

donde $T \circ D^t$ está en G, ya que

$$\begin{aligned} (T \circ D^t)^{-1} &= (T^{-1} \circ D^{-1})^{-1} \\ &= D \circ T \\ &= (T^t \circ D^t)^t \\ &= (T \circ D^t)^t \end{aligned}$$

Con esto se tiene la demostración, en el otro sentido es inmediata.

Con base a lo anterior se puede concluir el siguiente enunciado:

Sea X un grupo clásico o un álgebra de Lie y sea A su primera representación fundamental. Entonces r y s en X son conjugados sí y solo si:

1. A(r) y A(s) tienen el mismo polinomio característico.

2. Rang (A(r) x 1 - 1 x A(r))
=Rang (A(s) x 1 - 1xA(s))
=Rang (A(r) x 1 - 1 x A(s))

BIBLIOGRAFIA

♦1. ARTIN E.,Geometry Algebra, Interscience Publishers, 1966

♦ 2. BYRNES CHRISTOPHER and GAUGER MICHAEL., Characteristic free, Improved decidability criteria for the similarity problem, Linear and Multilinear Algebra., Volúmen 5, 1978.

♦ 3. BYRNES CHRISTOPHER and GAUGER MICHAEL., Decidability criteria for the similarity problem, with aplications to the moduli of linear Dynamical Systems, Advances in Mathematics, 1977.

♦ 4. LIZCANO B. LUIS I., El problema de la similaridad., UFPS, 1996

♦ 5. MALTSEV A. I., Fundamentos de Algebra Lineal. Editorial Mir, 1971

♦ 6. MOSTOW G. D., SAMPSON J H. and MEYER J., Fundamental Structures of Algebra, Macgrw-Hill, 1995