La Globalización del Saber Matemático

ISMAEL CERVANTES
Profesor Asociado
Departamento de Matemáticas
U.F.P.S.

Desde los tiempos de Tales de Mileto 585 A.C., Euclides 190 A.C. con su geometría sintética hasta G. .D Birkhoff 1930, con la geometría métrica, el concepto de proyección paralela e isometría ha tenido diferentes enfoques y aplicaciones, llegando a ser uno de los conceptos más relevantes del análisis matemático y de la topología.

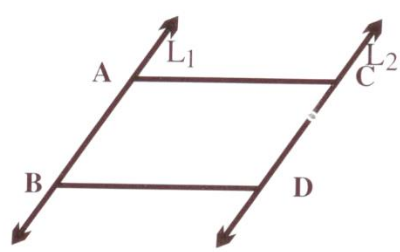
Tal hecho se presenta en los espacios métricos equivalentes o topológicamente equivalentes, así:

Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son los lados de un paralelogramo ABCD, contenidos en las rectas paralelas L_1 y L_2 tenemos que, por las propiedades del parapelogramo, la distancia AB es igual a la distancia CD por ser lados opuesto del mismo.

Ahora, si se considera la recta L_1,con la distancia d, y la recta L_2 con la distancia d´, y sea

$$F: L_1 \longrightarrow L_2$$

una biyección tal que d(A,B) = d´(F(A), (F(B)) = d´(C,D), esta biyección determina un movimiento rígido, el cual lleva o proyecta el segmento $\overline{AB}$ sobre el segmento $\overline{CD}$, determinando así una isometría.



Lo anterior se puede expresar en términos de espacios métricos, como sucede en la siguiente definición.

DEFINICION: Sean (X, d) y (Y, d´) espacios métricos. Una biyección $F: X \longrightarrow Y$ se llama una isometría de (X, d) sobre (Y, d´) si $d(x_1, x_2) = d'(F(x_1), F(x_2))$ para todo x_1, x_2 que pertenecen a X.

Esta definición afirma que el espacio métrico (X, d) es isométrico al espacio métrico (Y, d¨) cuando existe una isometría de (X, d) sobre (Y, d´).

La isometría cumple las siguientes propiedades:

1. La función identidad $i: X \longrightarrow X$ es una isometría de X sobre si mismo.

2. Si F es una isometría de (X, d) sobre (Y, d´) entonces se tiene que $F^{-1}: Y \longrightarrow X$ es una isometría de (Y, d´) sobre (X, d)

3. Si (X, d) es isométrico a (Y, d´) y (Y, d´) es isométrico a (Z, d´´), entonces se tiene que (X, d) es isométrico a (Z, d´´).

Esto nos indica que la isometría es una relación de equivalencia sobre las clases de todos los espacios métricos. Por consiguiente espacios métricos isométricos son métricamente equivalentes. En estos espacios muchas propiedades se preservan.

Otro sentido en el cual podemos decir que dos espacios métricos son equivalentes, o topológicamente equivalentes, es mediante la caracterización de conjunto abierto, como se puede ver en la siguiente definición.

DEFINICION: Un espacio métrico (X, d) es topológicamente equivalente al espacio métrico (Y, d´) si existe una biyección $F: X \longrightarrow Y$ tal que F(U) es un d´-abierto en Y, para cada U d-abierto en X, y F^{-1} (V) es d-abierto en X, para cada V d´-abierto en Y´, es decir el espacio (X, d´) es topológicamente equivalente a (Y, d´) si existe una correspondencia uno a uno del conjunto X y conjunto Y, bajo la cual subconjuntos d-abiertos de X, le corresponden subconjuntos d´-abiertos de Y.

Como aplicación de esta definición es conveniente que todo lector interesado en el tema demuestre que espacios isométricos son topológicamente equivalentes.

La definición de espacio métrico fue dada por Mauricio Frechet en 1906. Desde Euclídes hasta nuestros días han pasado 22 siglos, tiempo suficiente para afirmar, que a través de la historia, mediante procesos de progresos continuos, se va incrementando el conocimiento en función de su construcción real.

Por ello se recomienda que al iniciar cualquier tema de estudio, se tenga presente lo que dijo Aristóteles en su libro **La Política**,

¨Si uno llega a estudiar, todas las cosas en su crecimiento partiendo del origen, obtendrá la más bella visión¨.

Quizás ésto sea lo que tanto anheló Piaget en su tratado de epistemología genética del pensamiento matemático.

BIBLIOGRAFIA

♦GALINDO, Gladis y FLOREZ Carlos. Ciencia y Conocimiento. Bogotá: USTA, 1988

♦MOISE, Edwin E. Elementos de Geometría. México: CECSA, 1968

♦STEPHEN, Willard. Topología. USA: ADDISON - WESLEY, 1970