

GENERACION AUTOMATICA DE MALLAS DE ELEMENTOS FINITOS EN DOMINIOS ARBITRARIOS

Alina Gainza Roche *
Reynaldo Boza Machado *
Robel Sánchez Ramírez *
Jorge S. Pérez Ronda *
José L. Agüero Rojas *
Daniel Alfaro Vigo **

* Universidad de Holguín Oscar Lucero Moya
** Laboratorio de Dinámica de Costas de Holguín.

RESUMEN

En este trabajo se describe un algoritmo de descomposición de una región arbitraria en elementos finitos triangulares de 3 nodos. Se basa en un esquema de generación en el cual una malla en 2D es generada en un dominio irregular con la ayuda de una malla preespecificada referida como malla guía. El algoritmo es una variante refinada de las ideas presentadas en [1] para dominios arbitrarios y puede ser fácilmente transformado para la obtención de elementos rectangulares. La implementación de este algoritmo forma parte del preprocesador GENMESH del sistema de análisis por elementos finitos SEA-FEM, dirigido al análisis de la circulación de las aguas y dispersión de sustancias en zonas costeras. Dada la flexibilidad del sistema puede ser empleado como preprocesador en una amplia variedad de problemas de ingeniería como análisis estructurales, transferencia de calor, etc.

1. INTRODUCCION

La solución de un problema de ingeniería mediante el uso del método de los elementos finitos conduce en su primera fase a la generación de una malla que cubre el dominio en estudio. Esta consiste en dividir el dominio en pequeñas regiones conocidas con el nombre de elementos, que se conectan o interactúan entre sí, a través de puntos, situados generalmente en los vértices del elemento y que se denominan nodos. El conjunto de elementos y nodos en que se discretiza el dominio conforma una malla de elementos finitos.

Una importante fase en el desarrollo del método de los elementos finitos quedó determinada en la mitad de la década de los 70 con la creación de preprocesadores y postprocesadores. Con el incremento de la popularidad del método y su uso por la industria espacial y automovilística, entre otras, se hizo evidente que un gran porcentaje del total del costo computacional estaba dado en la construcción y preparación del modelo. Con la ampliación del uso de la gráfica y de la tecnología CAD la generación de mallas ha ganado en automatización, y se considera hoy en día una de las tecnologías claves, necesarias para automatizar los procesos de análisis numérico y de ahí minimizar el tiempo utilizado en el ciclo de diseño. Por otra parte debemos tener en cuenta que después de haber seleccionado la función de interpolación, la eficiencia y exactitud del método depende de la malla desarrollada para el análisis. Una malla deficiente puede conducir a una aproximación de elemento finito inestable o no exacta. Esto puede resultar particularmente significativo en el análisis de dominios irregulares (2)

Convenientemente los métodos de generación pueden ser clasificados en semiautomáticos y completamente automáticos. Un método de generación completamente automático es aquel en el cual solo la forma (geometría y topología) del objeto y los atributos de la malla, como densidad, tipo de elemento, etc., son necesarios. Cualquier otro método que requiera una entrada adicional tal como dividir el objeto en subdominios es semiautomático.

Muchos programas de elementos finitos producen mallas usando una técnica conocida como mapped meshing, la cual resulta ventajosa desde el punto de vista del programador, pero difícil de aplicar cuando la geometría del problema es irregular o compleja. Otra de las técnicas utilizadas es la conocida como free meshing, término usado para describir

los métodos en los cuales los nodos son insertados en el dominio del problema y los elementos son conectados a estos nodos. La aplicación de estos métodos permite ganar un mayor control sobre la densidad de los nodos de la malla, pero requiere del incremento de los esfuerzos del programador (1) (3)

Los esquemas de mallas estructuradas se basan en la aplicación de un conjunto de operadores, que identifican y extraen determinadas regiones a partir de la información geométrica contenida en la representación de la frontera del dominio, y en donde en cada una de estas regiones se genera una malla.

Adicionalmente serán necesarios algoritmos para la mezcla de mallas de regiones vecinas (4). Por otro lado, en los esquemas para generar elementos cuadriláteros o hexahedrales basados en la descomposición recursiva del dominio en rectángulos (2D) o cubos (3D), se dificulta el control de la densidad de la malla y además la naturaleza recursiva del proceso, puede requerir en el caso de regiones complejas, de una cantidad sustancial de recursos computacionales (1).

En este trabajo se presenta una alternativa que permite la generación automática de una malla de elementos finitos triangulares capaz de manipular un dominio arbitrario evitando en lo posible elementos notablemente distorsionados.

2. METODOS DE GENERACION AUTOMÁTICA

Un dominio geoméricamente válido es aquel en el que las fronteras no se solapan ellas mismas ni entre si. El método que describiremos a continuación parte de la descripción de las fronteras de un dominio geoméricamente válido. Las fronteras están constituidas por un conjunto de entidades ordenadas que pueden ser segmentos de rectas o segmentos de arcos.

Inicialmente se determina el rectángulo mínimo-máximo que encierra el dominio. Este rectángulo de coordenadas (X_{min} , Y_{min}) y (X_{max} , Y_{max}) es dividido en rectángulos iguales, mediante un conjunto de rectas horizontales y verticales, separadas por un valor constante que denominaremos delta y que se obtiene de la siguiente forma:

$$\text{delta} = \sqrt{(X_{max} - X_{min}) * (Y_{max} - Y_{min}) * p / 100.0}$$

Donde p representa un porcentaje que corresponde al área de los elementos rectangulares obtenidos con respecto al área total del rectángulo mínimo-máximo.

Obtenemos una malla rectangular referida como malla guía o malla inicial, que es representada en forma de matriz de N elementos en la dirección horizontal y M en la dirección vertical (Fig. 1). Los elementos y nodos de esta malla se referirán como elementos guías y nodos guías respectivamente.

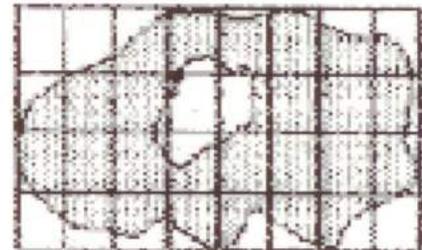


Fig. 1. Malla rectangular, representada en forma de matriz de N elementos.

En el momento de la generación de esta malla guía se determinan todas las intersecciones de las rectas horizontales y verticales con las fronteras. El número de intersecciones para cada recta puede ser 0, 1 o un número par (resultado de aplicar el método a un dominio válido). Esta información además de ser necesaria en la construcción de los elementos de la malla final es utilizada con el objeto de poder determinar si un nodo guía (k) pertenece o no al dominio.

A partir de este momento es aplicado el siguiente algoritmo a la malla guía:

Para todo elemento guía (EG)

1. Clasificar EG respecto al dominio
2. Realizar movimientos de nodos guías (NG) en correspondencia con la configuración obtenida.
3. Formar polígono teniendo en cuenta NG y sus movimientos anteriores
4. Generar malla en polígono.

La clasificación se realiza teniendo en cuenta las 5 posibles configuraciones que se pueden obtener, las cuales responden al número de nodos guías que pertenecen al dominio. El examen de la pertenencia o no de estos nodos al dominio, se logra como resultado de determinar las intersecciones de los lados del elemento guía con las fronteras. Para ello se utiliza la información obtenida en la generación de la malla inicial.

Veamos como ejemplo el análisis de algunas de estas configuraciones.

Caso 1. Ningún nodo guía pertenece al dominio.

Si los lados de este elemento no son interceptados por la frontera del dominio, estamos en presencia del caso trivial donde se deshecha

el elemento. Si la frontera presenta oscilaciones como las que se muestran en la Fig. 2, formamos un polígono cuyos vértices coincidan con los puntos de intersección de los lados del elemento guía con la frontera. Este polígono va a ser mallado teniendo en cuenta que los nodos en los elementos generados no sean colineales y se preserve la conexidad.

Caso 2. Dos nodos del elemento guía pertenecen al dominio.

Al igual que en todas las configuraciones se analiza el elemento guía y en dependencia del número de lados que sean interceptados por la frontera, se obtienen nuevas configuraciones.

Ejemplo:

- Existen intersecciones en 2 lados del elemento guía (Fig. 3).

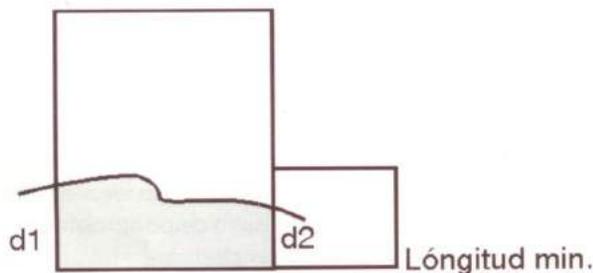


Fig. 3. Intersecciones de dos lados del elementos guía.

Se determina d1 y d2.

d1 = distancia desde el primer nodo interior hasta el primer punto de intersección con la frontera en el lado anterior.

d2 = distancia desde el segundo nodo interior hasta el primer punto de intersección con la frontera en el lado correspondiente al nodo.

Se toma como valor criterial para la longitud menor permitida en un lado de un elemento, el resultado de dividir por 2 la longitud de un lado del elemento guía. (nombraremos este valor en adelante, longitud_min).

Si $d1 > longitud_min$ y $d2 > longitud_min$.

Se mueven los nodos guías hacia la frontera.

La acción de movimiento implica determinar si algún nodo ha sido movido con anterioridad, para en ese caso desdoblarse o hacer resurgir un nuevo nodo, de forma que se describan mejor las irregularidades de la frontera.

Con estos nodos y teniendo en cuenta los resultados de movimientos anteriores y la influencia del movimiento en el

elemento que se analiza, se construye un polígono que es mallado de igual forma que en el caso 1.

Si $d1 < longitud_min$ y $d2 > longitud_min$
ó $d1 > longitud_min$ y $d2 < longitud_min$.

Se mueven el nodo guía interior correspondiente a la menor distancia y el nodo guía exterior que corresponde a la mayor distancia hacia la frontera. Se forma el polígono, con estos nodos y los nodos resultantes de movimientos anteriores que inciden en el elemento.

Si $d1 > longitud_min$ y $d2 > longitud_min$.

Mover los nodos exteriores hacia la frontera y formar el polígono.

A continuación se representan otras configuraciones que pueden obtenerse en diferentes casos.

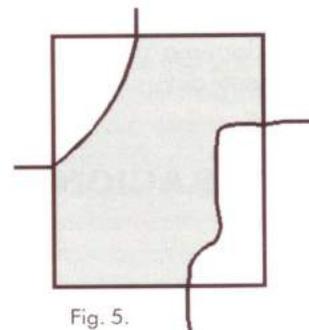


Fig. 5.

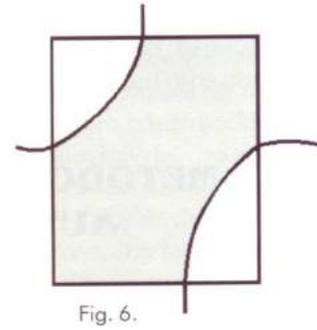


Fig. 6.

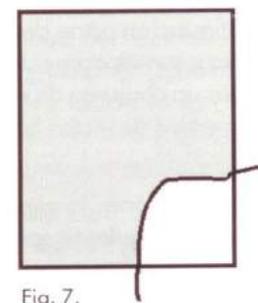


Fig. 7.

3. MALLADO DE UN POLÍGONO

El orden de los vértices del polígono determinan una orientación en el mismo, de forma que el vértice sucesor del último es el primero. El número de vértices lo denotaremos por n.

La malla obtenida en el dominio poligonal construido, debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. Los nodos de los elementos resultantes se corresponden con vértices del polígono.
2. Ningún elemento va a contener otro nodo que no sea aquellos que determinan sus vértices.
3. La intersección de los interiores de dos elementos cualesquiera, es vacía.
4. La unión de todos los elementos se corresponde con el dominio poligonal.
5. Cada lado de un elemento pertenece como máximo a dos elementos.

En el algoritmo de mallado del polígono se utiliza una estructura denominada matriz de distancia, donde se almacenan las longitudes de las distancias entre todos los vértices, excluyendo las distancias entre vértices consecutivos.

Dist (1; 3, 4, ..., n-1)

Dist (2; 4, 5, ..., n)

Dist (3; 5, 6, ..., n)

...

Dist (3; 5, 6, ..., n)

Si se desea conocer la distancia entre el vértice i y j , se obtiene de la siguiente forma:

$$\text{Dist}(i,j) = \text{Dist}(j,i), \text{ si } j < i$$

$$\text{Dist}(i,j) = \text{Dirección_Base}(i) [j - i - 2]$$

Dirección_Base representa un desplazamiento en la matriz de distancia, a partir de donde se encuentra almacenada la longitud entre el vértice i y el $i + 2$.

$$\text{Dirección_Base} = n - 3 + \sum_{j=2}^{i-j} (n - j - 1) = \frac{(i-2) * (2n - i - 3)}{2 + n - 3}$$

Nuestro algoritmo de mallado del polígono (P) consiste de los siguientes pasos:

1. Si el número de vértices (n) se corresponde con el número de nodos deseado en el elemento (3 en este caso) se construye un elemento y se finaliza el proceso. En otro caso continuar el paso 2.

2. Determinar matriz de distancias.
3. A partir de la menor distancia entre dos vértices i, j particionar P en P1 y P2. El primer polígono (P1) estará formado por los vértices (i, \dots, j) y el segundo (P2) por (j, \dots, i) .
4. Análisis de la colinialidad entre los vértices y convexidad en P1. Si no satisface P1 estos requerimientos asignarle a $\text{dist}(i, j)$ infinito y regresar al paso 3.
5. Analizar la colinialidad entre los vértices y convexidad en P2. Si no satisface P2 estos requerimientos asignarle a $\text{dist}(i, j)$ infinito y regresar al paso 3.
6. Aplicar algoritmo a P1
7. Aplicar algoritmo a P2.

4. IMPLEMENTACION

La implementación de estos algoritmos forma parte del preprocesador del sistema de análisis por elementos finitos SEA-FEM, el cual incluye otras bondades como la numeración automática de los nodos, de forma que se minimice tanto el tiempo requerido para resolver las ecuaciones nodales, como los requerimientos de memoria, facilidades de edición de la malla. Entiéndase por eliminar, mover, adicionar de forma gráfica e interactiva la posición de los nodos y la generación automática de las condiciones de frontera. Ha sido implementado en Borland C++ versión 3.1 que combina las ventajas de la programación orientada a objeto con la eficiencia computacional del C.

Entre las clases de mayor incidencia en el diseño se encuentran:

Para la descripción geométrica del dominio a discretizar se diseñaron las clases OBound y ODomain. La clase OBound se utiliza para representar una frontera en particular del dominio.

La clase ODomain agrupa el conjunto de fronteras que limitan la región que va a ser estudiada y entre las operaciones que le fueron definidas se encuentran:

- adicionar una nueva frontera
- mostrarse
- escalarse
- rotarse

La clase OMesh fue diseñada para obtener la discretización

final del dominio. Posee entre sus atributos el conjunto de nodos y elementos que la forman y se construye a partir de un objeto de la clase ODomain y de un valor que especifica el tamaño promedio de los elementos que desea el usuario. Para ello se auxilia de la clase OGuideMesh que representa la malla guía. En el proceso de generación de la malla serán analizados cada uno de los elementos pertenecientes a la malla

guía, determinando los posibles movimientos de sus nodos en caso de estar fuera del dominio siguiendo los criterios vistos en este trabajo.

El algoritmo ha sido probado con numerosos conjuntos de datos, y algunos ejemplos se muestran en las figuras 8 y 9.

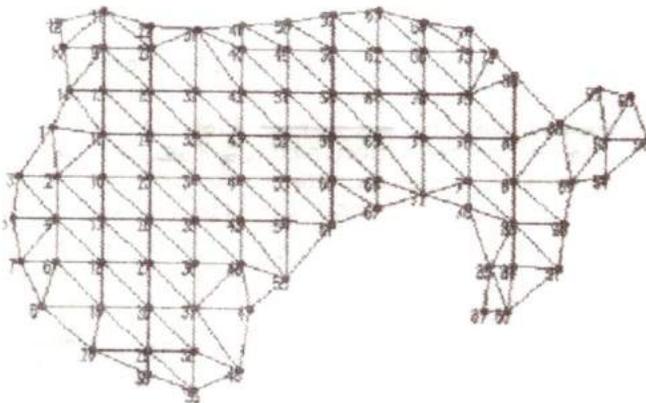


Fig. 8. Malla de la Bahía de Nipe

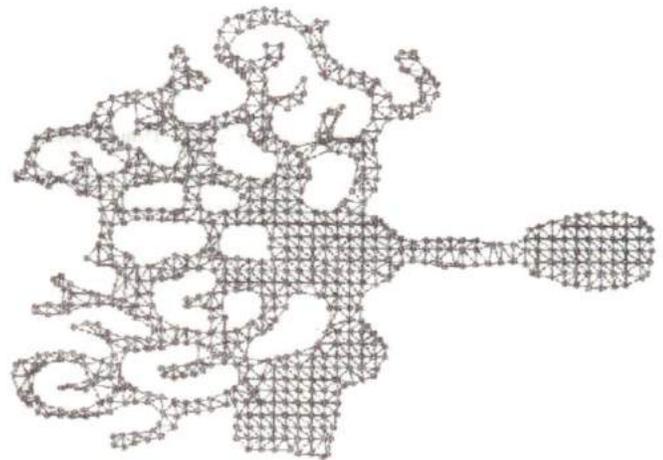


Fig. 9. Malla de la Bahía de Cancún en México

CONCLUSIONES

En este trabajo se describió un método de generación automática de mallas de elementos finitos, que genera elementos triangulares en un dominio arbitrario. No requiere la descomposición recursiva de todo el dominio, lo que lo hace eficiente en cuanto a tiempo de ejecución. Ha sido probado con éxito en el sistema de análisis por elemento finito SEA-FEM.

BIBLIOGRAFIA

- (1) PARK, J. S. and HWANG, S.M. Automatic remeshing in finite element simulation of metal forming processes by guide grid method. *J Materials Processing Techn.* 1991.
- (2) PARTHASARATHY, V.N. and KODIGALAM, S.A. Constrained optimization approach to finite elements mesh smoothing. *Finite Elements in Analysis and Design*. Sept., 1991.
- (3) GRABINSKY, M.W. F. and CURRAN, J. H. Efficient Mesh Generation Procedures for Finite Element Analysis of Underground Structures. *J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr.* 1993.
- (4) KALLINDERIS, Y. and WARD, S. Prismatic Grid Generation for Three-Dimensional Complex Geometries. 1992.